Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)
Chapitre n°13 Lois de Newton

Isaac Newton (1643 - 1727) : physicien, mathématicien et philosophe anglais, surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, aussi appelée « mécanique newtonienne », à partir des trois lois universelles du mouvement et de la loi universelle de la gravitation.

Pré-requis

- Seconde : Thème Mouvement et interactions
  - Modélisation d'une action par une force. Caractéristiques d'une force. Exemples de forces : force d'interaction gravitationnelle ; poids ; force exercée par un support et par un fil.
  - Principe des actions réciproques.
  - Principe d'inertie.
- Première : Thème Mouvement et interactions
  - Interactions fondamentales et introduction à la notion de champ : Force de gravitation et champ de gravitation.
- Terminale : Thème Mouvement et interactions
  - Centre de masse d'un système. Référentiel galiléen. Équilibre d'un système.
  - Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme.
- PCSI : Thème Mouvement et interactions
  - Chapitre n°12 : Description et paramétrage du mouvement d'un point

Objectifs du chapitre

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la cinématique, c'est-à-dire à la description du mouvement, sans se préoccuper des causes. Ce chapitre traite de la dynamique, qui fait le lien entre les causes du mouvement, les actions mécaniques exercées sur le système, et le mouvement du système.

— Énoncer les lois de Newton.

— Étudier différents mouvements.

Plan du cours

Programme officiel

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.2. Lois de newton	
Quantité de mouvement	
Masse d'un système. Conservation de la masse pour système fermé.	Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé.
Quantité de mouvement d'un point et d'un système de points. Lien avec la vitesse du centre de masse d'un système fermé.	Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points sous la forme : $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}(G)$.
Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
Notion de force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
Deuxième loi de Newton. Théorème de la quantité de mouvement.	Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen. [TP] Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force.
Force de gravitation. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Étudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.
Modèles d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute.	Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée. [TP] Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.
Modèle linéaire de l'élasticité d'un matériau.	Modéliser un comportement élastique par une loi de force linéaire ; extraire une constante de raideur et une longueur à vide à partir de données mesurées ou fournies. Analyser la limite d'une modélisation linéaire à partir de documents expérimentaux. [TP] Mettre en œuvre un microcontrôleur lors d'un test de traction.
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.
Modèle des lois de frottement de glissement : lois de Coulomb.	Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – ☺ – ☹ – Définir le centre d'inertie.

2 – ☺ – ☹ – Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points en fonction de la masse totale et du vecteur vitesse du centre d'inertie.

3 – ☺ – ☹ – Définir référentiel galiléen – Énoncer le principe d'inertie.

4 – ☺ – ☹ – Énoncer la 3^{e} loi de Newton.

5 – ☺ – ☹ – Énoncer le principe fondamental de la dynamique.

6 – ☺ – ☹ – Donner la méthode de résolution d'un exercice de mécanique.

7 – ☺ – ☹ – Donner les expressions de la force gravitationnelle et du poids.

8 – ☺ – ☹ – Étudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement : établir les équations horaires et l'équation de la trajectoire.

9 – 🙂 – 🙁 – Étudier le mouvement d'un système soumis à une force de frottement fluide : établir l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse, en déduire la vitesse limite. Établir une équation équation adimensionnée.

10 – 🙂 – 🙁 – Modéliser le comportement élastique d'un matériau par la loi de Hooke. Donner les limites de cette loi.

11 – 🙂 – 🙁 – À partir des lois de Coulomb sur le frottement, déterminer : une condition d'équilibre (sur une pente par exemple) ; une distance de freinage ; l'équation du mouvement.

12 – 🙂 – 🙁 – Établir l'équation du mouvement du pendule simple.
Linéariser l'équation différentielle obtenue. Commenter.

I Cadre de l'étude et lois générales de la dynamique

I.1 Système

Les systèmes étudiés dans ce chapitre sont soit assimilés à des **points matériels** (de taille très petite par rapport aux obstacles rencontrés), soit des **solides en translation dont on décrira le mouvement du centre de masse**.

I.2 Référentiel galiléen et principe d'inertie

Capacité exigible : Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.

Définition

- Un **point matériel est isolé** s'il n'est soumis à aucune action mécanique extérieure.
- Un **point matériel est pseudo-isolé** s'il est soumis à des actions mécaniques extérieures qui se compensent, c'est-à-dire de résultante nulle.

Énoncé du principe d'inertie – définition des référentiels galiléens

Il existe une classe privilégiée de référentiels, appelés **référentiels galiléens**, dans lesquels un point matériel isolé ou pseudo-isolé persévère dans un mouvement rectiligne uniforme.

À retenir

Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Exemples :

— Le **référentiel terrestre** peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durées très petites devant 24 h et sur des distances très petites devant le rayon de la Terre. Il sera utilisé pour étudier le mouvement d'objets à la surface (ou à proximité) de la Terre.

— Le **référentiel géocentrique** peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durées très petites devant 1 année. Il sera utilisé pour étudier le mouvement des satellites autour de la Terre. Le phénomène des marées s'explique par la nature non galiléenne du référentiel géocentrique.

— Le **référentiel héliocentrique** peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durées allant jusqu'à plusieurs millions d'années. Pour l'instant, aucune expérience n'a mis en évidence le caractère non galiléen de ce référentiel.

I.3 Actions mécaniques

I.3.a) Actions mécaniques et forces

Définition : Actions mécaniques et forces

- Les **actions mécaniques** sont l'ensemble des causes subies par un système de la part d'autres systèmes pouvant modifier, provoquer ou empêcher son mouvement. Elles peuvent également déformer l'objet.
- Les actions mécaniques peuvent être à distance (poids, action exercée par un aimant) ou de contact (frottement, réaction du support).
- Les forces sont représentées mathématiquement par des **vecteurs**. Une force est donc caractérisée par son point d'application, sa direction, son sens et son intensité (la norme du vecteur). Elles s'expriment en Newton (N).
- Les **forces ne dépendent pas du référentiel** et sont additives, c'est-à-dire un système soumis à deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ est soumis à la résultante $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$

I.3.b) Réaliser un bilan des actions mécaniques

Capacité exigible : Établir un bilan des forces sur un système, ou plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur une figure.

Méthode

Après avoir **défini le système étudié et précisé le référentiel d'étude**, il est nécessaire de

— **réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures subies par le système étudié** ;

— **représenter les forces sur un schéma**, pour cela, prendre l'habitude de faire des GRANDS schémas avec des angles positifs, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et non égaux à $\frac{\pi}{4}$.

I.3.c) Principe des actions réciproques

À connaître : Principe des actions réciproques

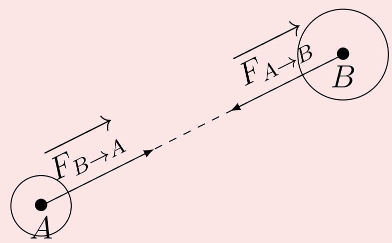
Soient deux corps A et B en interaction :

— le corps A exerce sur B la force $\overrightarrow{F_{A\to B}}$;

— le corps B exerce sur A la force $\overrightarrow{F_{B\to A}}$.

Les forces $\overrightarrow{F_{A\to B}}$ exercée par A sur B et $\overrightarrow{F_{B\to A}}$ exercée par B sur A sont :

- portées par la droite (AB) : $\overrightarrow{F_{B\to A}} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$;
- opposées : $\overrightarrow{F_{B\to A}} = -\overrightarrow{F_{A\to B}}$



I.4 Masse et centre d'inertie

I.4.a) Masse

Capacité exigible : **Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé.**

En physique, la masse est une **grandeur physique positive intrinsèque d'un corps**. En physique newtonienne, qui est le cadre de notre étude, c'est une **grandeur extensive**, c'est-à-dire que la masse d'un corps formé de parties est la somme des masses de ces parties. Elle est **conservative**, c'est-à-dire qu'elle **reste constante pour un système fermé** n'échangeant pas de matière avec son environnement.

L'**unité de masse** est le **kilogramme** dans le Système international d'unités (SI).

I.4.b) Centre d'inertie d'un système de points

Capacité exigible : Énoncer la définition du barycentre. Utiliser son associativité. Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène.

Définition : centre d'inertie

On définit le **centre d'inertie G** d'un système de points $\mathcal{S} = \{M_i(m_i)\}_{i\in[1,n]}$ par :

$$\forall \text{ point } O \quad \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i\overrightarrow{OM_i}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i\overrightarrow{GM_i}\right)$$

G est le barycentre des points M_i affectés des coefficients m_i.

Exercice de cours A

Q1. Déterminer la position du centre d'inertie G d'un système de deux masse m_1 et m_2, avec $m_1 = m$ et $m_2 = 2m$.

Q2. Déterminer la position du centre d'inertie G d'une tige cylindrique de rayon R, de longueur L et de masse m répartie uniformément.

I.5 Quantité de mouvement et principe fondamental de la dynamique

I.5.a) Quantité de mouvement d'un point matériel

Définition : Quantité de mouvement d'un point matériel

La **quantité de mouvement** d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ est définie par :

$$\overrightarrow{p(M/\mathscr{R})} = m\,\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$$

$\left\|\overrightarrow{p(M/\mathscr{R})}\right\|$ s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

I.5.b) Quantité de mouvement d'un système de points

Définition : Quantité de mouvement d'un système de points

La **quantité de mouvement d'un système $\mathcal{S}$ de points $\{M_i(m_i)\}_{i\in[1,n]}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$** est la somme des quantités de mouvement de chaque point dans $\mathscr{R}$:

$$\overrightarrow{p(\mathcal{S}/\mathscr{R})} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{p(M_i/\mathscr{R})} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{v(M_i/\mathscr{R})}$$

Capacité exigible : Établir l'expression de la quantité de mouvement d'un système restreint au cas de deux points sous la forme $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v(G/\mathscr{R})}$.

Quantité de mouvement d'un système de points

On considère un système constitué de deux points matériels $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$.

Q1. Exprimer la quantité de mouvement du système en fonction des vecteurs positions $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$.

Q2. En utilisant la définition du centre d'inertie, établir que $\overrightarrow{p(\mathcal{S}/\mathscr{R})} = m\overrightarrow{v(G/\mathscr{R})}$, avec m la masse totale du système, soit $m = m_1 + m_2$.

À retenir : Quantité de mouvement d'un système de points

La **quantité de mouvement d'un système $\mathcal{S}$ de masse m et de centre d'inertie G** dans le référentiel $\mathscr{R}$ s'écrit

$$\overrightarrow{p(\mathcal{S}/\mathscr{R})} = m\ \overrightarrow{v(G/\mathscr{R})}$$

I.6 Principe fondamental de la dynamique

À retenir : Théorème de la quantité de mouvement

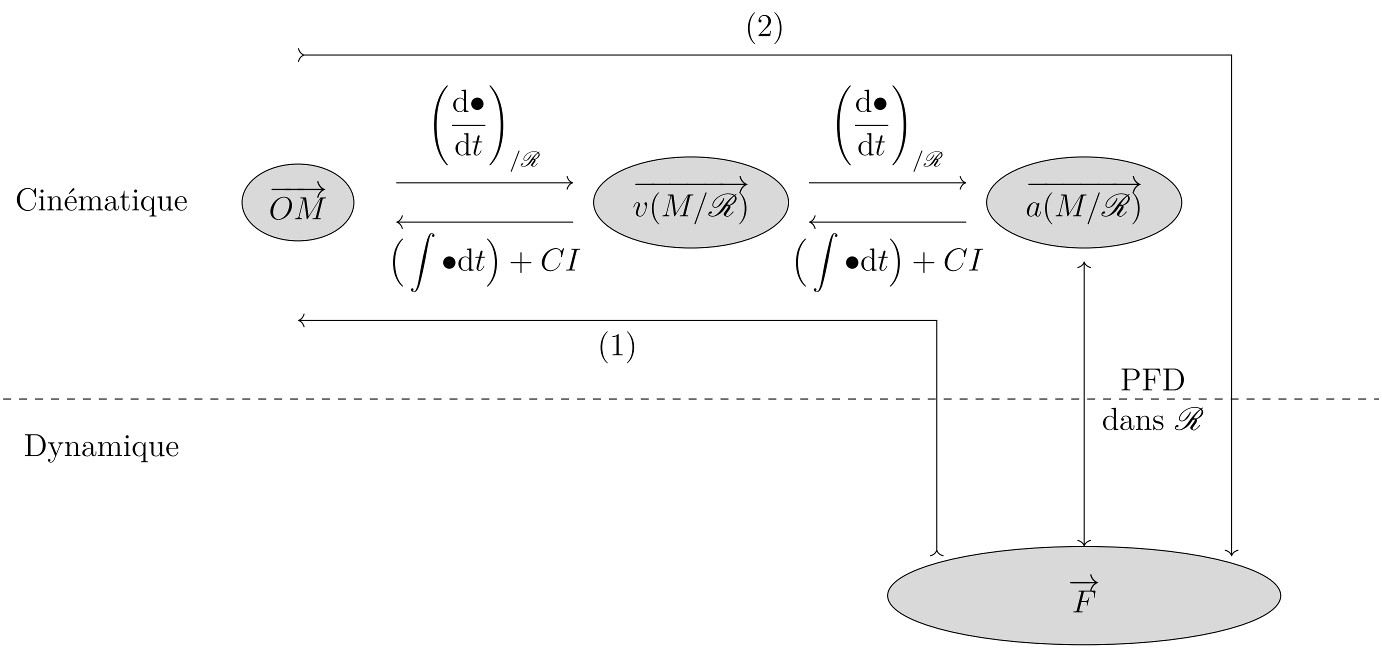
Soit un système $\mathcal{S}$, dont on étudie le mouvement dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen.
Le **théorème de la quantité de mouvement** ou **Principe Fondamental de la Dynamique** exprime que la dérivée temporelle de la quantité de mouvement du système $\mathcal{S}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ galiléen est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\ \overrightarrow{p(\mathcal{S}/\mathscr{R})}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}\left(m\ \overrightarrow{v(G/\mathscr{R})}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$$

Pour un système $\mathcal{S}$ fermé, de masse m constante, on peut l'écrire sous la forme :

$$m\ \overrightarrow{a(G/\mathscr{R})} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$$

avec $\overrightarrow{p(\mathcal{S}/\mathscr{R})}$ la quantité de mouvement du solide et $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$ la résultante des forces extérieures au système.
La loi de la quantité de mouvement pour un solide permet de déterminer le mouvement de son centre d'inertie G, de la même façon qu'on étudiait le mouvement d'un point matériel.



(1) : Si la résultante des forces exercées sur M est connue, on peut remonter au vecteur vitesse $\overrightarrow{a(M/\mathscr{R})}$, puis au vecteur position $\overrightarrow{OM}$
(2) : Si le mouvement est connu, c'est-à-dire $\overrightarrow{OM}$ ou $\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$ ou $\overrightarrow{a(M/\mathscr{R})}$ connu, on peut déterminer la résultante des forces qui s'exercent sur M

I.7 Résolution d'un problème de mécanique

- *Données :*
  - Système étudié (objet dont on étudie le mouvement) : $M(m)$;
  - Conditions initiales : vecteurs position et vitesse initiaux (à l'instant $t = 0$ pris pour origine des temps)
  - Hypothèses sur le mouvement : frottements ...
- *But* : trouver le mouvement de M dans le référentiel $\mathscr{R}$ à tout instant t, ou déterminer l'expression d'une force « inconnue ».

Méthode

① Définir le **<u>système</u>** étudié (=l'objet dont on étudie le mouvement).

② Préciser le **<u>référentiel d'étude</u>** $\mathscr{R}_g$, ainsi que le repère cartésien $\left(O; \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$ lié au référentiel.
En 1ère année, ce référentiel sera supposé galiléen à l'échelle de l'expérience.

③ Choisir le **<u>système de coordonnées adapté</u>** à la description du mouvement.
Faire un **<u>schéma clair</u>** et de taille suffisante sur lequel vous représentez le système, le référentiel $\mathscr{R}_g$ et la base choisie.
Introduire les notations nécessaires associées aux grandeurs utiles dont seules les valeurs sont fournies (par exemple : m pour la masse, v_0 pour la vitesse initiale).

④ Faire un **<u>bilan des actions mécaniques</u>** précis et complet : les nommer et en donner leurs expressions.
<u>Représenter toutes les forces</u> sur le schéma précédent.
⚠ Attention à ne pas oublier les forces de liaison (réaction du support notamment).

⑤ Écrire « J'**<u>applique le Principe Fondamental de la Dynamique</u>** au système dans le référentiel terrestre / du laboratoire galiléen ». *(D'autres méthodes seront vues dans la suite du cours de mécanique, on verra que certaines sont plus adaptées selon le problème posé.)*

⑥ **<u>Projeter les équations vectorielles</u>** dans la base associée au système de coordonnées choisi pour repérer M.

⑦ Déterminer l'**expression littérale** de la grandeur demandée (force, équations horaires, équation de la trajectoire...) en prenant garde à **vérifier l'homogénéité**.
On fait enfin l'éventuelle application numérique, sans omettre l'**unité**.

Méthode : Schémas

Les schémas doivent toujours :
- être grands ;
- avec la base de projection adaptée (cartésienne, polaire, cylindrique ou sphérique) représentée ;
- avec toutes les forces dont on connait les caractéristiques représentées dessus ;
- les angles doivent être :
  - positifs,
  - compris entre 0 et 90 ° ,
  - et très différents de 45 ° (sinon le cos et le sin ont la même valeur et vous risquez de les confondre lors des projections).

Attention

Même si vous avez des valeurs numériques dans un énoncé, il ne faut JAMAIS remplacer les grandeurs (m, v_0 ...) par leurs valeurs numériques dans le calcul (exclusivement à la fin pour l'A.N. : dernière ligne !)

II Mouvements dans le champ de pesanteur terrestre uniforme

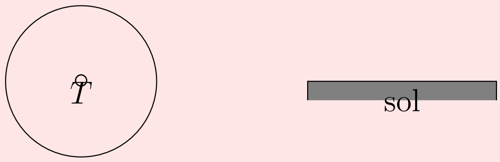
II.1 Interaction gravitationnelle et poids

À proximité de la Terre, un point M de masse m subit la force gravitationnelle exercée par la Terre : $\overrightarrow{F_{T\to M}} = -G\dfrac{mM_T}{TM^2}\dfrac{\overrightarrow{TM}}{TM}$, qui est portée par la droite (TM) passant par le centre de la Terre et est dirigée vers le centre de la Terre. En première approximation, et dans le cadre où le référentiel terrestre peut être considéré galiléen à l'échelle des expériences étudiées, nous pouvons **assimiler la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur l'objet au poids de l'objet** *(Cf cours de 2e année PC)*.

À connaître : le poids

Le poids de l'objet de masse m s'écrit $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$, avec $\overrightarrow{g}$ le vecteur champ de pesanteur terrestre. Le poids :

- s'exerce au centre d'inertie de l'objet ;
- est dirigé selon la verticale du lieu considéré ;
- est dirigé vers le centre de la Terre ;
- et est de norme mg, avec à la surface de la Terre, $g \approx 9,8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ (on peut considérer g uniforme jusqu'à des altitudes de quelques kilomètres).



Attention : Ne pas confondre g et G

- G est la constante universelle de gravitation, elle vaut $G = 6,67.10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$, partout dans l'Univers (puisque universelle !)
- g est le champ de pesanteur dont la valeur dépend de l'astre sur lequel on se trouve et la distance à l'astre. Sur terre, g vaut environ $9,8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, mais elle varie d'un point à l'autre du globe (de $9,78\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ à l'équateur à $9,83\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ aux pôles) et avec l'altitude.

II.2 Chute libre

<u>Capacité exigible :</u> **Étudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.**

Exemple de cours à connaître : le mouvement parabolique

Soit un ballon de football modélisé par un point matériel M de masse $m = 400$ g, ne subissant que son poids (frottements négligés). On étudie ce système dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On choisit (Oz) la verticale ascendante et (Oxy) le plan horizontal. À $t = 0$, le ballon est lancé depuis l'origine O du repère avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ contenue dans le plan (Oxz) de norme $v_0 = 25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et faisant un angle $\psi = 30°$ avec (Ox).

Q1. Schématiser la situation.

Q2. Au cours du mouvement, que peut-on dire du vecteur accélération ?

Q3. Par intégrations successives, établir les équations horaires du mouvement : $\begin{cases} x(t) & = \\ y(t) & = \\ z(t) & = \end{cases}$

Q4. Établir l'équation cartésienne $z(x)$ de la trajectoire. Dessiner l'allure de la trajectoire. Représenter dessus également le vecteur vitesse et le vecteur accélération à différents instants.

Attention

L'équation différentielle issue du PFD est du second ordre et son intégration conduit donc à l'introduction de deux constantes d'intégration.

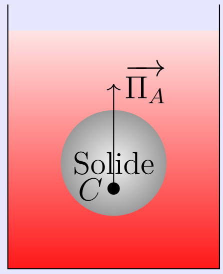
II.3 Action d'un fluide

II.3.a) Poussée d'Archimède

Définition : Poussée d'Archimède

Tout corps au repos ou en mouvement dans un fluide subit de la part de ce fluide une action mécanique, la **poussée d'Archimède** (qui est égale à la résultante des forces de pression s'exerçant dessus, *cf partie de statique des fluides en fin d'année*) qui possède les caractéristiques suivantes :

- point d'application : centre de masse du fluide déplacé C (centre de masse du fluide qui occuperait la place du corps s'il n'était pas là) ;
- direction : verticale du lieu considéré (droite passant par le point d'application et le centre de la Terre) ;
- sens : du centre de la Terre vers le point d'application (« vers le haut ») ;
- norme : égale au poids du fluide déplacé $\left\|\overrightarrow{\Pi_A}\right\| = m_{\text{fluide déplacé}}\, g$.



Ainsi la **poussée d'Archimède est opposée au poids du fluide déplacé** : $\overrightarrow{\Pi_A} = -m_{\text{fluide déplacée}}\overrightarrow{g}$.
Dans le cas où le fluide est homogène (corps uniquement dans l'eau, ou dans l'air, et pas entre deux fluides), la poussée d'Archimède s'écrit :

$$\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{fluide déplacé}}\overrightarrow{g}$$

Cela sera davantage développé dans le chapitre 28 Statique des fluides du Thème 3. L'énergie : conversions et transferts.

Méthode : Prise en compte de la poussée d'Archimède ?

La poussée d'Archimède s'exerce dans la même direction que le poids et dans le sens opposé, il faut comparer ces deux forces
La poussée d'Archimède s'écrit $\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{fluide déplacé}}\overrightarrow{g}$ et le poids $\overrightarrow{P} = \rho_{\text{système}} V_{\text{système}}\overrightarrow{g}$, et en général $V_{\text{fluide déplacé}} = V_{\text{système}}$.
La poussée d'Archimède peut être négligée devant le poids lorsque la masse volumique du fluide est négligeable devant la masse volumique du système.

- La **poussée d'Archimède peut être négligée** pour un solide plein dans l'air.
- La **poussée d'Archimède ne peut pas être négligée**, pour un solide vide (par ex. ballon de baudruche) dans l'air ou un solide quelconque dans un liquide.

II.3.b) Frottements fluides

<u>Capacité exigible :</u> Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée.

Un corps en mouvement dans un fluide subit la force de trainée, ou force de frottement fluide. La trainée a pour direction celle du mouvement, elle est opposée au mouvement et est d'autant plus importante que la vitesse du corps est importante.
Il n'existe pas de « formule théorique » pour la force de frottement fluide. Des études expérimentales ont conduit à deux expressions pour la force de frottement fluide selon la vitesse du corps :

- à « faible vitesse » : $\overrightarrow{f} = -k_1 \overrightarrow{v}$, avec $k_1 > 0$;
- à « vitesse élevée » : $\overrightarrow{f} = -k_2 \left\|\overrightarrow{v}\right\| \overrightarrow{v}$, avec $k_2 > 0$.

Les coefficients k_1 et k_2 sont déterminés expérimentalement ; ils dépendent du fluide et de l'objet en mouvement (forme et matière).
Le cadre d'utilisation de chaque expression sera précisé en $2^{\text{ème}}$ année dans le cours de mécanique des fluides.

Exemple de cours à connaître : Prise en compte des frottements fluide

On s'intéresse à la chute d'un grêlon que l'on considère sphérique de rayon $R = 10$ mm et de masse $m = 3,9$ g. Son mouvement est repéré par la position de son centre M.
Nous allons étudier l'influence des frottements sur son mouvement dans le champ de pesanteur.
On étudie le grêlon dans le référentiel terrestre supposé galiléen à l'échelle de la chute. On choisit (Oz) la verticale descendante et (Oxy) le plan horizontal, le repère $(Oxyz)$ étant lié au référentiel terrestre.
À $t = 0$, le grêlon a une vitesse nulle et il se trouve à l'origine O du repère, à une hauteur $h = 1,0$ km du sol.
Sur le site de Météo France, il est indiqué qu'un tel grêlon atteint le sol avec une vitesse de $75 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Traînée linéaire

Dans un premier temps, considérons que la force de frottement fluide s'écrit $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}$, avec R le rayon du grêlon et η la viscosité du fluide dans lequel se produit le mouvement, on donne pour l'air $\eta_{\text{air}} = 1,7.10^{-5}$ uSI.

Q1. Quelle est l'unité SI de η ?

Q2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la composante verticale v_z de la vitesse du grêlon.
Qualifier cette équation différentielle. Pour quel système a-t-on déjà rencontré une équation différentielle de ce type ?

Q3. À l'aide de l'équation précédente, exprimer la vitesse limite $v_{\text{lim},1}$ atteinte par M et la constante de temps caractéristique τ_1 d'évolution de la vitesse.
Faire les AN pour $v_{\text{lim},1}$ et τ_1.
Commenter les valeurs numériques et les courbes.

Q4. Réécrire l'équation différentielle adimensionnée en introduisant $V^* = \dfrac{v_z}{v_{\text{lim},1}}$ et $t^* = \dfrac{t}{\tau_1}$.

Traînée quadratique

Nous considérons maintenant la modélisation des frottements quadratiques $\overrightarrow{f} = -\dfrac{1}{2}\rho C_x \pi R^2 \|\overrightarrow{v}\|\overrightarrow{v}$, avec R le rayon du grêlon, C_x un coefficient adimensionné proche de 0,45 pour une sphère et ρ la masse volumique du fluide dans lequel se produit le mouvement, on a $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Q5. Vérifier que l'expression du coefficient de frottement est homogène.

Q6. Établir l'équation différentielle vérifiée par la composante v_z (ou $\dot{z}$) de la vitesse selon (Oz) du grêlon.
Qualifier cette équation différentielle.

Q7. Sans la résoudre, exprimer puis calculer la vitesse limite $v_{\text{lim},2}$ atteinte par le grêlon. Commenter.

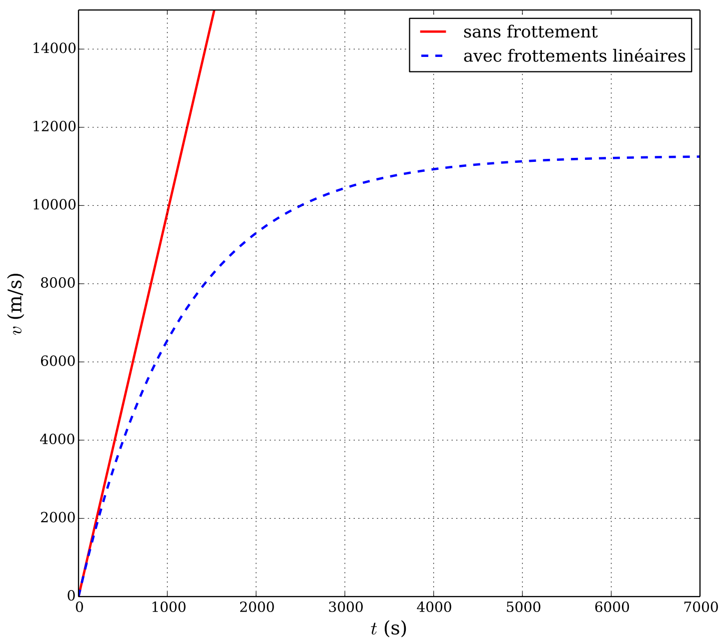
Q8. Établir l'équation différentielle adimensionnée, vérifiée par $V^* = \dfrac{v_z}{v_{\text{lim},2}}$ et la mettre sous la forme :

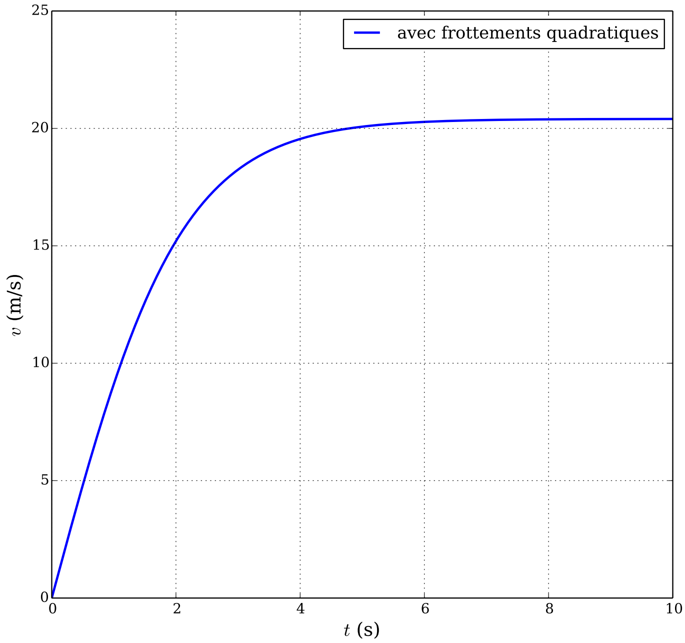
$$\tau_2 \frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t} + (V^*)^2 = 1$$

En déduire l'expression et la valeur de la constante de temps τ_2.

Cette équation différentielle non linéaire peut être résolue numériquement à l'aide de Python.

Q9. Commenter la courbe $v = f(t)$ obtenue (v est la norme de la vitesse). Quelle durée Δt_2 met le grêlon pour atteindre sa vitesse limite ?





III Le pendule simple

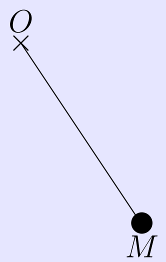
III.1 Tension d'un fil

Définition : Tension du fil

Un fil, infiniment souple, tendu, exerce sur un objet accroché à une de ses extrémités une force de contact, appelée **tension du fil** et notée $\overrightarrow{T}$, dont les caractéristiques sont :

- Direction : celle du fil ;
- Sens : d'une extrémité du fil vers l'autre ;
- Norme : T dépend des autres forces mises en jeu et du mouvement, on la détermine a posteriori une fois le mouvement déterminé.

  Pour un fil idéal, inextensible et de masse négligeable, la norme $\left\|\overrightarrow{T}\right\|$ est uniforme le long du fil.



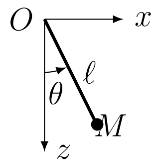
Si le fil n'est pas tendu, la tension est nulle.

III.2 Mouvement du pendule simple

<u>**Capacité exigible :**</u> **Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.**

Exemple de cours à connaître : le pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'un point M de masse m accroché à l'extrémité d'un fil inextensible, sans masse et sans rigidité, dont l'autre extrémité O est fixe dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire galiléen.
On néglige les frottements dus à l'air.



Q1. Quel est le mouvement du point M ? Quel est le système de coordonnées adapté ? Le représenter sur un schéma.

Q2. Faire le bilan des forces et représenter les forces sur le schéma précédent.

Q3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique.

Q4. Sur quel vecteur de la base choisie faut-il projeter le PFD afin d'en déduire l'équation différentielle du mouvement ?
Établir l'équation différentielle du mouvement. Quelle est la nature de cette équation différentielle ?

On se place, dans la suite, dans le cadre des mouvements de petite amplitude : θ reste petit devant 1 rad.

Q5. Linéariser l'équation différentielle dans ce cas. À quel type de système déjà étudié cette année l'équation différentielle correspond-elle ?

Q6. La résoudre avec les conditions initiales suivantes : $\theta(0) = \theta_0$ et $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0}$.

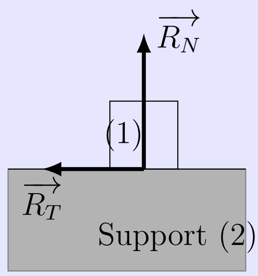
IV Mouvements sur un support solide

IV.1 Réaction du support

Définition : Réaction du support

Lorsque le système étudié repose sur un support solide, le support exerce sur lui une action mécanique, appelée **réaction du support**, que l'on décompose en deux composantes :

- la **réaction normale**, notée $\overrightarrow{R_N}$:
  - de direction : orthogonale au support ;
  - de sens : dirigée du support vers le système ;
  - de point d'application : le point de contact ;
  - de norme : $\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$, qui dépend des autres actions mécaniques en jeu (cf § suivant).
- la **réaction tangentielle**, notée $\overrightarrow{R_T}$:
  - de direction : tangente au support ;
  - de sens : qui dépend du mouvement du système par rapport à celui du support (cf § suivant) ;
  - de point d'application : le point de contact ;
  - de norme : $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|$,qui dépend des autres actions mécaniques en jeu et du mouvement (cf § suivant).



IV.2 Lois de Coulomb sur le frottement solide

Définition : Vitesse de glissement

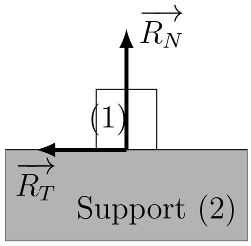
On considère un système (1) en translation en contact avec un support (2).

On définit la **vitesse de glissement** du système 1 par rapport au support 2 : $\boxed{\overrightarrow{v_g(1/2)} = \overrightarrow{v(1/\mathscr{R})} - \overrightarrow{v(2/\mathscr{R})}}$

Les **lois de Coulomb du frottement solide** (lois phénoménologiques : obtenues expérimentalement) fournissent une relation entre les composantes tangentielle et normale de la réaction du support.
Elles vous seront systématiquement fournies, vous devez savoir les exploiter.

On considère un système (1) en translation en contact avec un support (2).

La réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ et la réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ exercées par le support sur le système sont reliées par les **lois de Coulomb du frottement** :



- **S'il n'y a pas glissement** : $\overrightarrow{v(1/\mathscr{R})} = \overrightarrow{v(2/\mathscr{R})} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_g(1/2)} = \overrightarrow{0}$, alors $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < f_s\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$, avec f_s le **coefficient de frottement statique** [sans dimension, sans unité].
- **S'il y a glissement du système sur le support** : $\overrightarrow{v(1/\mathscr{R})} \neq \overrightarrow{v(2/\mathscr{R})} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_g(1/2)} \neq \overrightarrow{0}$, alors :
  - $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{R_T} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{v_g(1/2)} \\ \overrightarrow{R_T} \cdot \overrightarrow{v_g(1/2)} < 0 \end{array}\right\}$ $\overrightarrow{R_T}$ est dans le sens opposé au vecteur vitesse de glissement
  - $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_d\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ avec f_d le **coefficient de frottement dynamique** [sans dimension, sans unité].

$\boxed{f_d < f_s}$, mais comme souvent les deux ne sont pas très différents, nous les confondrons la plupart du temps.

REMARQUES

- Un **contact sans frottement**, c'est-à-dire avec un coefficient de frottement $f = 0$, impose une **réaction purement normale**.
- Lorsqu'on cherche à montrer que le contact entre le système et son support est rompu, on peut le déterminer par le fait que $\boxed{\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \text{ lorsqu'il n'y a plus de contact}}$.

Quelques valeurs de f_d et f_s :

Matériaux	pneus/béton sec	pneus/béton mouillé	bois/bois	Corde/bois	chaussure/glace
f_s	1	0,7	0,5	0,5	0,1
f_d	0,7-0,8	0,5	0,3	0,3	0,05

Attention – Erreur à ne pas commettre

Attention à « poids et réaction du support se compensent » ou « poids et réaction normale du support se compensent » : ceci est faux dans la plupart des cas !

IV.3 Exploitation des lois de Coulomb

Capacité exigible : Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.

Exemple de cours à connaître : Freinage

Le conducteur d'une voiture de 1200 kg, roulant à 20 km · h^{-1}, met sa voiture au point mort pour s'arrêter sous l'effet du frottement du pneu avec la route, que l'on modélisera par des frottements de glissement de coefficient $f = 0,013$. Calculer la distance d'arrêt.

Exemple de cours à connaître : Équilibre en présence de frottements solides

Une alpiniste est debout sur la face rocheuse d'une montagne. Les semelles et les talons de ses chaussures ont un coefficient de frottement statique de 0,5.
Quelle est la pente maximale du rocher sur lequel l'alpiniste peut se maintenir sans glisser ?

Méthode

La mise en œuvre des lois de Coulomb nécessite souvent de faire une hypothèse concernant la présence ou l'absence de glissement, que l'on traduit par une équation assortie d'une condition de validité.

- **Je fais l'hypothèse de non glissement** :
  1. Je connais le mouvement du système : $\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})} = \overrightarrow{v(\text{support}/\mathscr{R})}$ ($= \overrightarrow{0}$ si le support est fixe dans le référentiel d'étude).
  2. En appliquant le PFD, j'en déduis l'expression des forces $\overrightarrow{R_N}$ et $\overrightarrow{R_T}$ (en effet je connais $\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R})$, puisque je connais le vecteur vitesse).
  3. Je vérifie l'hypothèse en comparant $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|$ et $f_s\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$:
     — Si $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < f_s\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$, l'hypothèse est vérifiée : le système ne glisse pas ;
     — Sinon, l'hypothèse n'est pas vérifiée, et il faut supposer que le système glisse sur le support.
- **Je fais l'hypothèse de glissement** :
  1. Je connais la relation entre $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ grâce à la loi de Coulomb : $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_d\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$.
     Le sens de $\overrightarrow{R_T}$ est opposé au sens de la vitesse de glissement :
     — Si le support est fixe et que le sens du mouvement est connu, le sens de $\overrightarrow{R_T}$ est connu.
     — Si le support est mobile et/ou que le sens du mouvement est inconnu, il en est de même pour $\overrightarrow{R_T}$, et donc il ne faut rien supposer ; le sens de $\overrightarrow{R_T}$ sera déduit de la vérification de l'hypothèse.
  2. En appliquant le PFD, j'en déduis l'expression du vecteur vitesse et du vecteur position.
  3. Je vérifie l'hypothèse en contrôlant que :
     — la vitesse de glissement n'est pas nulle ;
     — et $\overrightarrow{R_T} \cdot \overrightarrow{v_g(1/2)} < 0$, ce qui permet par ailleurs de déterminer le sens de $\overrightarrow{R_T}$ si cela n'était pas possible avant.

Application

À la caisse du supermarché, vous posez sur le tapis votre boîte de céréales préférée. La caissière / le caissier met en route le tapis roulant à une accélération constante $\overrightarrow{a}(T/\mathscr{R}_T) = a_0\overrightarrow{u_x}$ dans le référentiel terrestre.

Q1. Expérimentalement vous constatez que votre boîte ne glisse pas sur le tapis roulant. En déduire l'expression du vecteur vitesse de la boîte de céréales dans le référentiel terrestre.

Q2. Par application du PFD déterminer le vecteur $\overrightarrow{R_T}$. Quelle est sa norme ? son sens ?

Q3. À quelle condition sur le coefficient statique entre le tapis roulant et la boîte de céréales l'hypothèse « elle ne glisse pas » est valide ?

V Comportement élastique

<u>Capacité exigible :</u> Modéliser un comportement élastique par une loi de force linéaire ; extraire une constante de raideur et une longueur à vide à partir de données mesurées ou fournies. Analyser la limite d'une modélisation linéaire à partir de documents expérimentaux.

V.1 Test de traction

Un essai de traction est une expérience de physique qui permet d'obtenir des informations sur le comportement élastique, le comportement plastique et le degré de résistance à la rupture d'un matériau, lorsqu'il est soumis à une sollicitation uniaxiale.

Cet essai ou expérience consiste à placer une petite barre du matériau à étudier entre les mâchoires d'une machine de traction qui tire sur la barre jusqu'à sa rupture. On enregistre l'allongement et la force appliquée.

FIGURE 1 – Test de traction

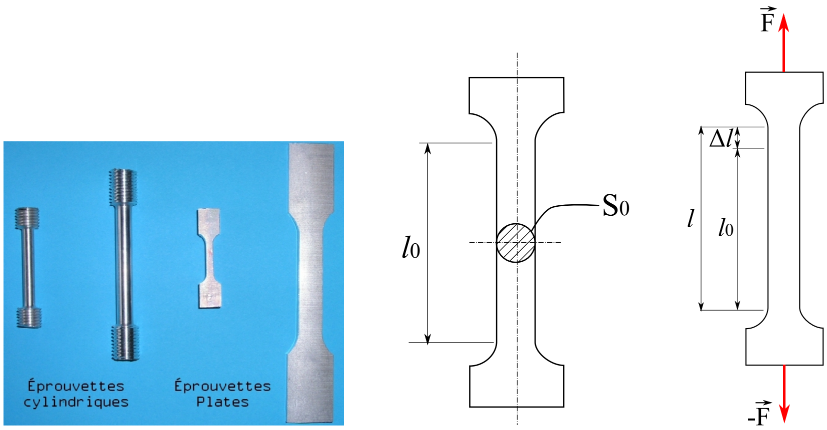


FIGURE 2 – Éprouvettes pour les tests de traction

Au cours de l'essai, on mesure :

— la contrainte exercée sur l'éprouvette, qui est défini comme la force exercée divisée par la section de l'éprouvette : $\sigma = \dfrac{F}{S_0}$;

— la déformation (ou allongement relatif) : $\varepsilon = \dfrac{\Delta\ell}{\ell_0}$, où $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ est l'allongement de l'éprouvette par rapport à la longueur

On distingue plusieurs zones sur la courbe :

— Pour une contrainte « faible » , inférieure à un certain seuil, la déformation est proportionnelle à la contrainte. C'est la **zone d'élasticité du matériau**. La contrainte et la déformation sont reliées par la loi de Hooke :

$$\sigma = E \times \varepsilon \Leftrightarrow \frac{F}{S} = E \times \frac{\Delta\ell}{\ell_0}$$

E est appelé le **module d'Young** du matériau et s'exprime en Pascal (Pa).

La force exercée sur l'éprouvette est reliée à la déformation par : $F = \dfrac{ES}{\ell_0} \times \Delta\ell$

— Au-delà d'une certaine contrainte R_e, c'est la **limite d'élasticité**, les liaisons interatomiques commencent à se rompre.

Le matériau n'est plus élastique. La courbe s'infléchit, et c'est le début de la déformation plastique : le corps se déforme de façon permanente.

— La courbe de traction présente ensuite un maximum, c'est la contrainte maximale que l'on peut imposer.

— À partir de ce point, la déformation est concentrée dans une zone, c'est la striction (« étranglement »). La force enregistrée diminue, puisque la section diminue dans la zone de striction.

— Enfin, pour une certaine contrainte, il y a rupture de l'échantillon, c'est la **limite de rupture.**

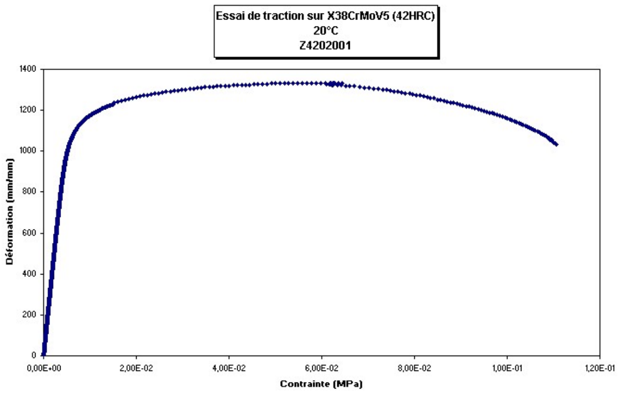


FIGURE 3 – Résultat d'un essai de traction sur un acier allié : courbe de la déformation $\dfrac{\Delta\ell}{\ell_0}$ en fonction de la contrainte

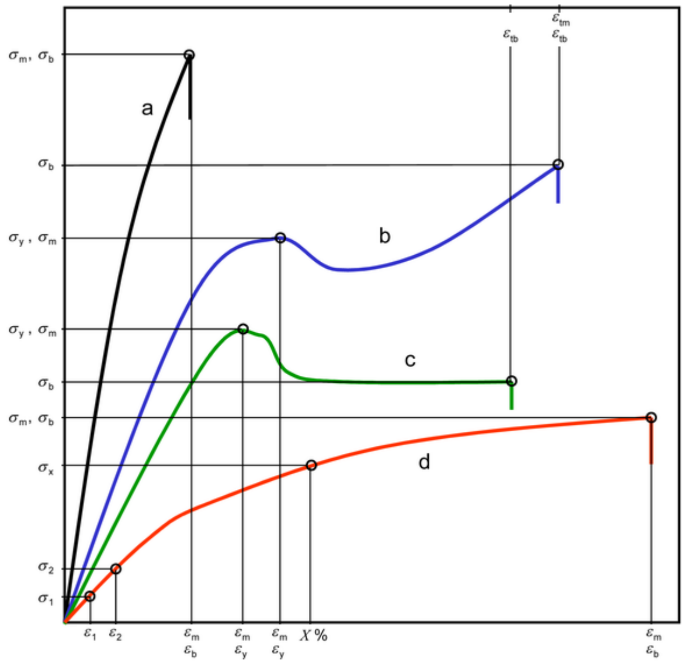


FIGURE 4 – Courbes générales de la contrainte en fonction de la déformation selon le matériau
(a) : matériau fragile, qui casse sans avoir subit une grande élongation (ex : verre)
(d) : matériau mou pouvant être étiré indéfiniment(ex : caoutchouc)

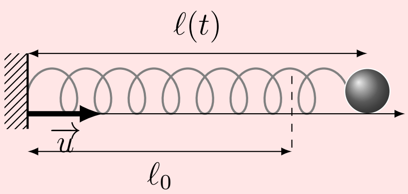
V.2 Force de rappel linéaire

La loi de Hooke modélise le comportement des solides élastiques soumis à des contraintes. Elle stipule que la déformation élastique est une fonction linéaire des contraintes. Sous sa forme la plus simple, elle relie l'allongement (d'un ressort, par exemple) à la force appliquée.

À connaître : Loi de Hooke

La force de rappel élastique exercée par un ressort de **longueur à vide** ℓ_0, de constante de raideur k et de **longueur instantanée** $\ell(t)$ s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{f} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u}}$$



avec $\overrightarrow{u}$ **le vecteur unitaire dirigé du point d'attache du ressort vers la masse** m.

V.3 Limites de la modélisation

La modélisation linéaire pour la relation entre la contrainte appliquée à un matériau et la déformation n'est valable que tant que la contrainte appliquée est inférieure à un certain seuil, qui dépend du matériau, de son histoire, ... Autrement dit, elle n'est valable tant que la déformation reste inférieure à un certain seuil.