? À rendre le mercredi 31 janvier 2024

Devoir Maison n°12 Dynamique

Comment chercher un D.M. ?

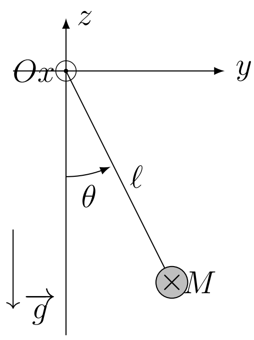
- Commencer à chercher le DM, **dès le soir de la distribution de l'énoncé**,
- **Avec le chapitre et les exercices ouverts** sous les yeux.
- En cas de blocage, **poser des questions**, à la fin d'un cours ou par mail : `nvalade.pcsi@gmail.com`
- La réponse à un problème de physique doit contenir :
  - des **schémas** grands, clairs et complets ;
  - des **phrases** qui expliquent votre raisonnement ;
  - les calculs **littéraux**, avec uniquement les **grandeurs littérales** définies par l'énoncé (ou par vous-même si elles ne le sont pas par l'énoncé) ;
  - les applications numériques avec un nombre adapté de chiffres significatifs et une **unité**.

Après avoir récupéré votre copie et le corrigé :

- Reprendre votre copie avec le corrigé afin de comprendre vos erreurs, lire les conseils donnés, ...
- Refaire le DM (si besoin) avant le DS suivant.

Exercice n°1 Pendule simple amorti

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligé. On note ℓ sa longueur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$, avec z vers le haut et $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}.
On prend en compte l'action de l'air que l'on modélise par une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$.



Q1. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ.

On lâche la masse m d'un angle $\theta_0 = 10°$ sans vitesse initiale, on peut donc considérer qu'à tout instant θ reste très petit devant 1 rad.

Q2. Montrer alors que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Nommer les constantes ω_0, Q, donner leurs unités et établir leurs expressions en fonction de m, α, g et ℓ.

Q3. Résoudre complètement l'équation différentielle pour $m = 100$ g, $\ell = 1,0$ m et $\alpha = 6,3.10^{-2}$ uSI. ***Si vous bloquez à cette question, rendez-vous, sans passer par la case « internet », au chapitre 6 §II.2, puis poursuivez la question. Vous avez également le droit à un « appel à un ami » (traduction = mail à la prof).*** *Si vous n'avez pas les références, ce n'est pas grave, vous avez compris l'idée !*

Q4. Tracer l'allure de θ en fonction du temps. *On soignera l'allure !*

Exercice n°2 Gouttes de pluie

Partie I Vitesse des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre D et de masse volumique $\rho = 1,0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$. On prendra pour l'air une masse volumique égale à $\rho_a = 1,3\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe Oz est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut $\vec{g} = g\overrightarrow{e_z}$ avec $g = 9,8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

Q1. Définir « référentiel galiléen ». Définir et exprimer le poids d'une goutte d'eau, en fonction uniquement des données ρ, D et $\overrightarrow{e_z}$.

Q2. On admet que la seule autre force mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse v de la goutte. Elle s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{\text{frott}}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \overrightarrow{e_z} \text{ avec } C = 6,0 \cdot 10^{-2}.$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

Q3. En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z}$$

où K est un coefficient à exprimer en fonction de ρ, ρ_a, C et de g. Calculer la vitesse limite pour des diamètres égaux à $1\ \mathrm{mm}, 3\ \mathrm{mm}$ et $5\ \mathrm{mm}$.

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures avec les barres d'incertitudes sont reportés sur la figure 1 en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en Q3 en traits pointillés.

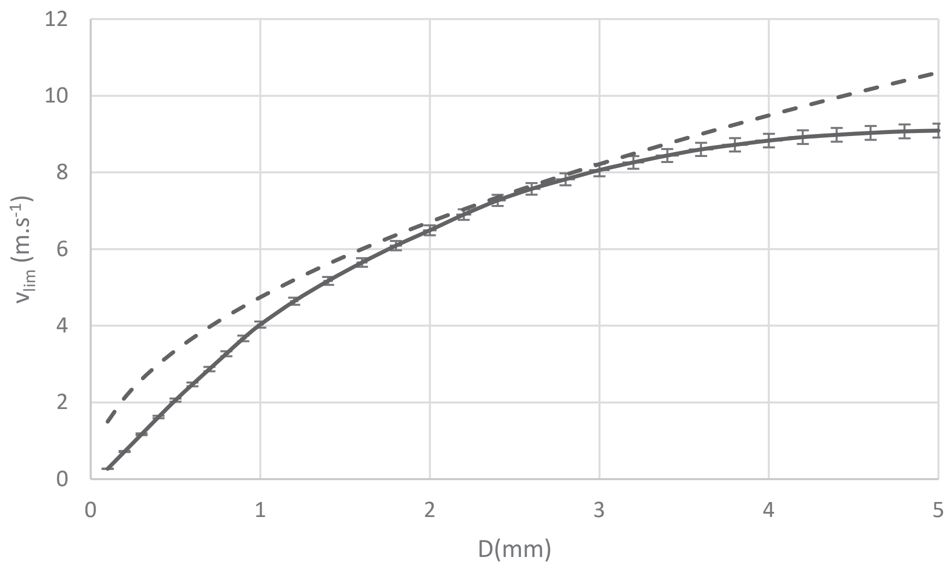


Figure 1 – Influence du diamètre sur la vitesse limite

Q4. Pour quelle(s) raison(s) le modèle théorique élaboré aux questions de Q1 à Q3 n'est-il pas validé pour toutes les tailles de gouttes ?

Partie II Disdromètre à impact avec platine

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation : $\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z}$, avec $K = 150\ \text{m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$.

On s'intéresse à un disdromètre à impact. Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse $m(D)$ ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon R et de masse M, relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti.

On note k la raideur du ressort liant la platine au support, ℓ_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc platine $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v_{\text{platine}}}$

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\overrightarrow{F(t)} = F(t)\overrightarrow{e_z}$ verticale sur celle-ci.

Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (figure 2).

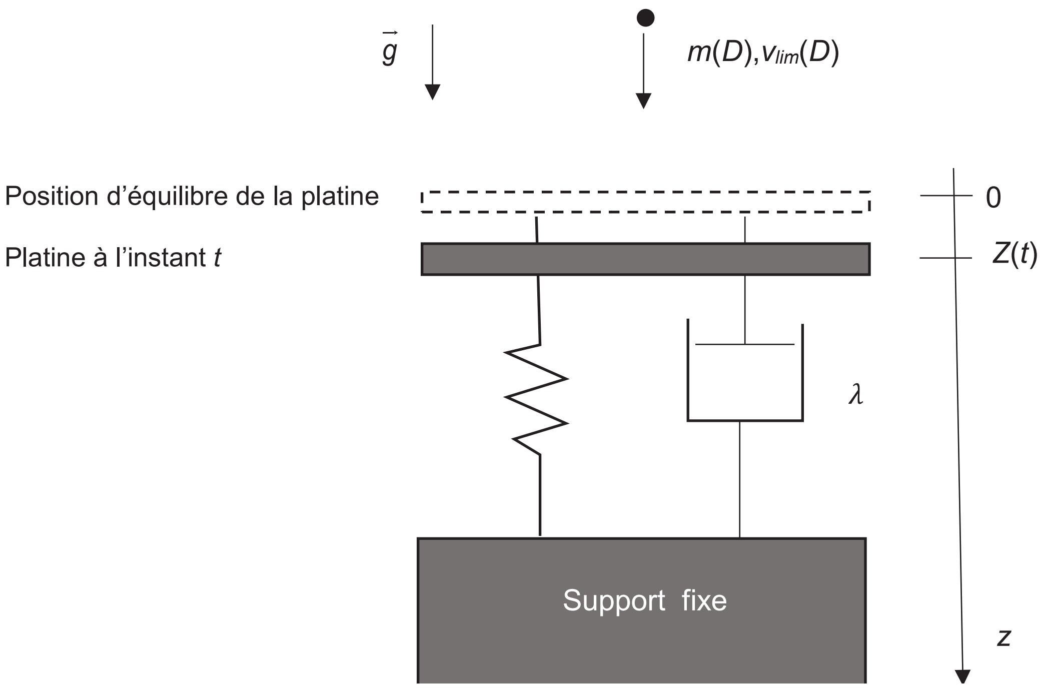


FIGURE 2 – Modélisation du disdromètre à impact à platine

Q5. Exprimer la longueur $\ell_{\text{éq}}$ du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte. Vérifier la cohérence physique en comparant $\ell_{\text{éq}}$ à ℓ_0.

⚠au vecteur unitaire qui dirige la force de rappel élastique (allez voir votre cours du chapitre n°5)

Q6. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β (on vérifiera bien qu'ils sont tous les deux positifs !) en fonction de k, M et λ.

Les questions Q8 et Q9 sont obligatoires pour tous.
Les autres questions (suivies d'une *) qui suivent sont obligatoires uniquement pour : Marie, Fatma, Younes, Ouadi, Aurélien, Baptiste, Ethan, Giovanni, Corentin.

La force $F(t)$ est modélisée par :

- $F = F_0 = m(D)\dfrac{v_{\text{lim}}(D)}{\tau(D)}$ pour $0 < t < \tau$
- $F = 0$ pour $t > \tau$.

Q7. * Donner la signification physique de τ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0,65$ tel que :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}.$$

Calculer τ pour $D = 2,5$ mm.

On se place à $0 \leq t \leq \tau(D)$ et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

Q8. Quelle doit être la relation entre les coefficients β et γ ? ***(Rendez-vous chapitre n°6 §II.2.c) et IV. qui vous aidera à répondre à « le régime transitoire le plus rapide ».)***

On se place dans ce cas.

Q9. Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leq t \leq \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \left(1 + \gamma\frac{t}{2}\right)e^{-\gamma t/2}\right]$$

(Rendez-vous chapitre n°6 §II.2.c) pour la résolution ».)

Q10. * Comment choisir γ pour réaliser $Z(\tau) = \dfrac{F_0}{k}$? Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à D^α et donner la valeur de α.

Q11. * Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\tau$.

Q12. * Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître D ?