Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

Chapitre n°14 Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

Pré-requis

- Première : Thème Mouvement et interactions
  - Énergie cinétique d'un système modélisé par un point matériel.
  - Expression du travail dans le cas d'une force constante.
  - Théorème de l'énergie cinétique
  - Forces conservatives. Énergie potentielle. Cas du champ de pesanteur terrestre. Forces non-conservatives : exemple des frottements.
  - Énergie mécanique. Conservation et non conservation de l'énergie mécanique. Gain ou dissipation d'énergie.
- Terminale : Thème Mouvement et interactions
  - Aspects énergétiques. Exploiter la conservation de l'énergie mécanique ou le théorème de l'énergie cinétique dans le cas du mouvement dans un champ uniforme.
- PCSI : Thème Mouvement et interactions
  - Chapitre n°12 : Description et paramétrage du mouvement d'un point
  - Chapitre n°13 : Lois de Newton

Objectifs du chapitre

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le mouvement de points matériels en appliquant le principe fondamental de la dynamique.

Dans ce chapitre, nous allons compléter les connaissances sur l'aspect énergétique vues au lycée et développer d'autres méthodes d'étude du mouvement, en complément du PFD.

Plan du cours

Programme officiel

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel	
Puissance, travail et énergie cinétique	
Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
Champ de force conservative et énergie potentielle	
Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
Énergie mécanique	
Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique.	Distinguer force conservative et force non conservative.
Mouvement conservatif.	Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
Mouvement conservatif à une dimension.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.
Outils mathématiques	
6. Analyse vectorielle	
Gradient d'un champ scalaire.	Citer le lien entre le gradient et la différentielle. Citer l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Citer l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes ; utiliser un formulaire fourni en coordonnées cylindriques ou sphériques.

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – 🙂 – ☹ – Définir et calcule le travail et la puissance d'une force.

2 – 🙂 – ☹ – Énoncer le théorème de la puissance cinétique et le théorème de l'énergie cinétique (en français et avec l'équation).

3 – 🙂 – ☹ – Définir ce qu'est une force conservative.

4 – 🙂 – ☹ – Donner les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique.

5 – 🙂 – ☹ – Établir les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique.

6 – 🙂 – ☹ – Donner la relation entre force conservative et énergie potentielle associée à l'aide du vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}$.

7 – 🙂 – ☹ – Donner l'expression du vecteur gradient en coordonnées cartésiennes.

8 – 🙂 – ☹ – Définir l'énergie mécanique.

9 – 🙂 – ☹ – Énoncer le théorème de la puissance mécanique et le théorème de l'énergie mécanique (en français et avec l'équation).

10 – 🙂 – ☹ – Définir mouvement conservatif.

11 – 🙂 – ☹ – Définir position d'équilibre, position d'équilibre stable et position d'équilibre instable.

12 – 🙂 – ☹ – Donner les caractéristiques d'une position d'équilibre, d'une position d'équilibre stable et d'une position d'équilibre instable en terme d'énergie potentielle.

13 – 🙂 – ☹ – Comment identifie-t-on les positions accessibles à un point matériel à partir du graphe de l'énergie potentielle ?

14 – 🙂 – ☹ – Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.

15 – 🙂 – ☹ – Expliquer l'algorithme d'Euler et l'implémenter en python.

16 – 🙂 – ☹ – Réécrire l'équation différentielle du deuxième ordre sous forme d'une équation vectorielle du premier ordre pour pouvoir la résoudre avec la méthode d'Euler.

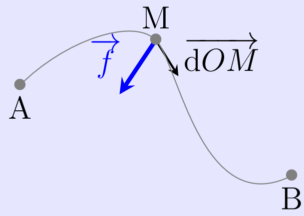
I Travail et puissance

I.1 Travail d'une force

Capacité exigible : **Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.**

Définition : Travail élémentaire d'une force

Le **travail élémentaire de la force $\overrightarrow{f}$** appliquée au point M au cours du déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ est défini par :

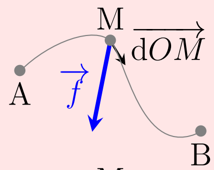


$$\delta\mathcal{W}_{/\mathscr{R}}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

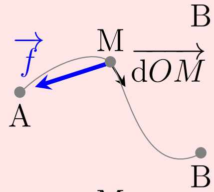
Un travail s'exprime en **Joule (J)**.

À retenir

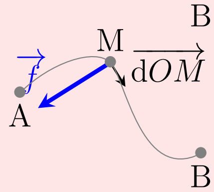
- Si $\delta W(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} > 0$, la force est dite **motrice**.



- Si $\delta W(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} < 0$, la force est dite **résistante**.



- Si $\delta W(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = 0$, la force **ne travaille pas**



Définition : Travail d'une force

Le **travail de la force $\overrightarrow{f}$** appliquée au point M au cours d'un déplacement de M allant de A (à l'instant t_A) vers B (à l'instant $t_B > t_A$) est la somme des travaux élémentaires en suivant le chemin suivi par M pour aller de A à B :

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = \int_{M\in\text{chemin } A\to B} \delta\mathcal{W}(\overrightarrow{f}) = \int_{M\in\text{chemin } A\to B} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Exercice de cours A Calculs de travaux

On considère un point M de masse m qui glisse sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale, d'un point A à un point B séparés d'une altitude h. On prend en compte les frottements solides de coefficient f modélisés par la de Coulomb : $\|\overrightarrow{R_T}\| = f\|\overrightarrow{R_N}\|$.

Q1. Calculer le travail de la réaction du support (normale et tangentielle).

On considère le système du pendule simple : un point M de masse m est attaché à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ inextensible et sans masse. On repère la position du point M par l'angle θ que fait le fil avec la verticale descendante.

Q2. Calculer le travail du poids au cours du déplacement du point M depuis l'angle θ_A à l'angle θ_B.

Méthode

Après avoir calculé un travail (ou une puissance, cf § suivant), **prenez l'habitude de TOUJOURS vérifier la cohérence du signe du travail avec la nature motrice ou résistante de la force !**

Attention

La formule apprise en terminale $W_{AB}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{AB}$, est valable uniquement pour une force constante (en norme, direction et sens). Ne la généralisez pas !

I.2 Puissance d'une force

<u>Capacité exigible</u> : Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force. Savoir que la puissance dépend du référentiel.

Définition : Puissance d'une force

La **<u>puissance de la force $\overrightarrow{f}$</u>** appliquée à $M(m)$ animé de la vitesse $\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$ dans $\mathscr{R}$:

$$\mathscr{P}_{/\mathscr{R}}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$$

$\mathscr{P}$ s'exprime en **<u>Watt (W)</u>**.

À retenir : Relation puissance / travail élémentaire

$$\mathscr{P}_{/\mathscr{R}}(\overrightarrow{f}) = \frac{\delta W_{/\mathscr{R}}(\overrightarrow{f})}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \delta W_{/\mathscr{R}}(\overrightarrow{f}) = \mathscr{P}_{/\mathscr{R}}(\overrightarrow{f})\mathrm{d}t$$

Exercice de cours B Reprendre les cas de l'exercice du § I.1 et calculer la puissance des forces. Étudier le signe des puissances et conclure sur le caractère résistant ou moteur des forces.

II Théorème de l'énergie cinétique

II.1 Énergie cinétique

Définition : Énergie cinétique

Soit M un point matériel de masse m et de vecteur vitesse $\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$ par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$.

L'**<u>énergie cinétique</u>** de M dans le référentiel $\mathscr{R}$ est : $\mathscr{E}_c(M/\mathscr{R}) = \frac{1}{2}m\left\|\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}\right\|^2$

L'énergie cinétique s'exprime en **<u>Joule (J)</u>**.

Remarque : $\mathscr{E}_c(M/\mathscr{R})$ dépend du référentiel $\mathscr{R}$ tout comme $\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$.

II.2 Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique

Système étudié : point matériel $M(m)$.
Référentiel d'étude : $\mathscr{R}(O;\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$ supposé galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des forces : $M(m)$ est soumis à des forces $\overrightarrow{f_i}$ de résultante $\sum\limits_i \overrightarrow{f_i}$

À connaître : Théorème de la puissance cinétique

Le **théorème de la puissance cinétique**, dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen énonce que la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel $M(m)$ est égale à la somme des puissances des forces qui s'exercent sur le système :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(M/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}^{\text{ext}}} = \sum_i \overrightarrow{f_i}\cdot\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$$

À connaître : Théorème de l'énergie cinétique

Le **théorème de l'énergie cinétique**, dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen, énonce que la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel $M(m)$ entre deux points A et B de sa trajectoire est égale à la sommes des travaux des forces entre les deux points A et B :

$$\boxed{\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c(M/\mathscr{R}) = \sum \mathcal{W}_{AB}^{\text{ext}}} = \sum_i \int_{A\frown B} \overrightarrow{f_i}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

avec $\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c(M/\mathscr{R}) \overset{\text{notation}}{=} \mathscr{E}_c(t_B) - \mathscr{E}_c(t_A)$

II.3 Utilisation du TPC et du TEC

Capacité exigible : **Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.**
Lorsque vous serez confrontés à un problème de mécanique, plusieurs pistes de résolution sont possibles mais dans certaines situations, une piste s'avère plus judicieuse que les autres. Il faut donc savoir repérer ces situations pour être le plus efficace possible. Les lois de la puissance et de l'énergie cinétiques n'apportent aucune information supplémentaire par rapport au PFD. On passe simplement d'une équation vectorielle (PFD) à une **équation scalaire** (soit TPC soit TEC), on perd donc de l'information.

Méthode : Quel théorème énergétique utiliser ?

Il est judicieux d'**utiliser ces théorèmes énergétiques (TEC, TPC)** lorsque :

— on cherche l'équation du mouvement d'un **système à un seul degré de liberté (ddl)** (une seule variable d'espace suffit à la description du mouvement) ;

— les **forces non connues** (réaction normale du support, tension du fil) **ne travaillent pas**.

Quel théorème énergétique utiliser : TEC ou TPC ?

— Si l'on cherche à déterminer l'**équation différentielle du mouvement d'un système à 1 ddl pour lequel les forces non connues ne travaillent pas**, le théorème le plus approprié est le **TPC**.

— Si l'on cherche à déterminer **un scalaire** (par ex : norme du vecteur vitesse, distance) d'un système à 1 ddl **à un instant t_1 particulier** et que l'on connaît la valeur de ce scalaire à un autre instant t_0, le théorème le plus approprié est le **TEC**.

Méthode : Comment appliquer le TPC ?

- **Rédaction commune à tous les exercices de mécanique** : système ; référentiel ; bilan des forces ; choisir la base de projection adaptée (cartésienne, polaire, cylindrique, sphérique) ; schéma complet du système étudié, avec la base adaptée et les forces représentées dessus.
- Écrire la phrase : « Théorème de la puissance cinétique au système … dans le référentiel .... (galiléen) » et écrire cette loi : $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(M/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}_{\text{ext}}$
- Exprimer la puissance des différentes forces.
- Exprimer l'énergie cinétique à partir de l'expression du vecteur vitesse dans la base de projection choisie. Calculer la dérivée de l'énergie cinétique.
- Égaliser la dérivée de l'énergie cinétique calculée précédemment et la somme des puissances des forces calculée précédemment.
- Conclure sur l'équation différentielle du mouvement.

Méthode : Comment appliquer le théorème de l'énergie cinétique (TEC) ?

- **Rédaction commune à tous les exercices de mécanique** : système, référentiel, choix de la base de projection, bilan des forces, schéma complet.
- Choisir les deux instants t_A et t_B, adaptés aux données du problème et à la question posée, entre lesquels appliquer la TEC.
- Écrire la phrase : « Théorème de l'énergie cinétique au système … dans le référentiel .... (galiléen) <u>entre les points A et B</u> » et écrire ce théorème : $\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c = \mathscr{E}_c(B) - \mathscr{E}_c(A) = \sum \mathcal{W}_{A\to B}$
- Exprimer le travail des différentes forces sur le trajet AB.
- Exprimer la différence d'énergie cinétique entre A et B : $\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c = \mathscr{E}_c(B) - \mathscr{E}_c(A)$
- Égaliser la différence d'énergie cinétique et les travaux calculés précédemment.
- Conclure sur ce qu'est demandé dans l'énoncé.

Attention – Erreur à ne pas commettre

Avant d'appliquer la TEC, il faut bien **préciser les deux instants/positions entre lesquels on l'écrit**.

Exercice de cours C Curling

Le curling est un sport pratiqué sur la glace avec des pierres en granite, taillées et polies selon un gabarit international. Le but est de placer les pierres le plus près possible d'une cible circulaire dessinée sur la glace, appelée la maison. Nous envisageons le lancer d'une pierre assimilée à un point M de masse $m = 20$ kg glissant selon l'axe Ox vers le point B visé (la maison). La pierre est lancée de la position initiale A avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$, la maison se trouvant à la distance $D = AB = 25$ m du point A.
Les frottements dûs à la glace sont modélisés par les lois de Coulomb sur le frottement solide de coefficient de frottement $f = 0,015$. Nous négligerons par ailleurs toute force de frottement fluide.
Déterminer la vitesse initiale v_0 pour que le lancé étudié soit gagnant : la pierre atteint la maison et s'y arrête !

III Force conservative et énergie potentielle

III.1 Définition

Définition : Force conservative et énergie potentielle

Une **force conservative** $\overrightarrow{f}$ est une force dont le travail $W_{AB}(\overrightarrow{f})$ ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B.

III.2 Énergie potentielle

Force conservative et énergie potentielle

- Le travail d'une force conservative $\overrightarrow{f}$ lors d'un déplacement entre A et B peut alors s'écrire comme l'opposé de la variation d'une fonction de la position appelée **énergie potentielle** :

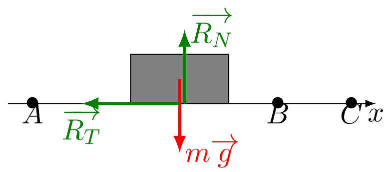
$$W_{AB}(\overrightarrow{f}) = -\big(\mathscr{E}_p(B) - \mathscr{E}_p(A)\big) \overset{\text{notation}}{=} -\Delta_{AB}\mathscr{E}_p$$

- Il existe une fonction de la position uniquement, appelée énergie potentielle telle que le travail élémentaire de la force s'exprime selon : $\delta W(\overrightarrow{f}) = -\mathrm{d}\mathscr{E}_p$

À l'inverse, **une force dont le travail dépend du chemin suivi** entre deux points A et B, **n'est pas conservative**.

Remarques 1. ***Force non conservative***

On considère un objet qui glisse sur un plan horizontal et soumis à une force de frottement solide de coefficient f vérifiant les lois de Coulomb : $\|\overrightarrow{R_T}\| = fmg$ avec $\overrightarrow{R_T}$ opposé à la vitesse de glissement.



Le sens de la force dépend du sens du mouvement.
Exprimons le travail pour aller de A à B par deux chemins : soit directement, soit en passant par C.

1. *De A à B, le vecteur vitesse de l'objet est dirigé selon $+\overrightarrow{u_x}$, de plus, le support est fixe dans le référentiel d'étude, donc la vitesse de glissement est dirigée selon $+\overrightarrow{u_x}$. D'après le théorème de Coulomb, $\overrightarrow{R_T}$ est dirigé selon $-\overrightarrow{u_x}$, connaissant sa norme, on peut écrire : $\overrightarrow{R_T} = -fmg\overrightarrow{u_x}$.*
$W_{AB}(\overrightarrow{R_T}) = \displaystyle\int_A^B \overrightarrow{R_T} \cdot \underbrace{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}_{=\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}} = \int_A^B -fmg\mathrm{d}x$, *soit* $\boxed{W_{AB}(\overrightarrow{R_T}) = -fmg(x_B - x_A) < 0}$
2. *De A à C, le mouvement a lieu selon $+\overrightarrow{u_x}$, et donc $\overrightarrow{R_T} = -fmg\overrightarrow{u_x}$.*
Attention, de C à B le mouvement a lieu selon $-\overrightarrow{u_x}$, donc $\overrightarrow{R_T}$ est selon $+\overrightarrow{u_x}$: $\overrightarrow{R_T} = +fmg\overrightarrow{u_x}$.
$$W'_{AB}(\overrightarrow{R_T}) = \int_A^C \underbrace{\overrightarrow{R_T}}_{-fmg\overrightarrow{u_x}} \cdot \underbrace{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}_{=\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}} + \int_C^B \underbrace{\overrightarrow{R_T}}_{+fmg\overrightarrow{u_x}} \cdot \underbrace{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}_{=\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}} = \int_A^C -fmg\mathrm{d}x + \int_C^B +fmg\mathrm{d}x$$
Soit $\boxed{W'_{AB}(\overrightarrow{R_T}) = -fmg(x_C - x_A) + fmg(x_B - x_C) = -fmg(2x_C - x_A - x_B)}$
3. *On constate que $W'_{AB}(\overrightarrow{R_T}) \neq W_{AB}(\overrightarrow{R_T})$: le travail de $\overrightarrow{R_T}$ dépend du chemin suivi, ce n'est donc pas une force conservative !*

III.3 Différentes énergies potentielles

<u>Capacité exigible</u> : **Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique.**

Méthode : Comment exprimer une énergie potentielle ?

1. Calculer le travail de la force $\overrightarrow{f}$ s'exerçant sur M au cours d'un déplacement entre deux positions A et B : $W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = \int_{A\frown B} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.
2. Mettre le travail sous la forme de l'opposé de la différence d'une fonction de la position uniquement en B et en A : $-(\mathscr{E}_p(B) - \mathscr{E}_p(A))$.
3. Identifier l'énergie potentielle à une constante additive près.

Il est aussi possible d'exprimer le travail élémentaire, constater qu'il ne dépend pas du mouvement, et de l'écrire ensuite sous la forme $-\mathrm{d}\mathscr{E}_p$.

Établir les expressions des énergies potentielles

Q1. Établir l'énergie potentielle de pesanteur.

Q2. Établir l'énergie potentielle élastique.

Q3. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle exercée par une masse m_C située en C sur une masse m située en M. On utilisera les coordonnées sphériques de centre C.
Établir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle.

À connaître : Expressions des énergies potentielles

- L'<u>**énergie potentielle de pesanteur**</u> d'un point matériel de masse m, se trouvant à l'altitude z d'un axe (Oz) ascendant s'écrit
$$\mathscr{E}_{\mathrm{pp}} = +mgz + \mathrm{cste}$$
- L'<u>**énergie potentielle de pesanteur**</u> d'un point matériel de masse m, se trouvant à l'altitude z d'un axe (Oz) descendant s'écrit
$$\mathscr{E}_{\mathrm{pp}} = -mgz + \mathrm{cste}$$
- L'<u>**énergie potentielle élastique**</u> d'un ressort de longueur $\ell(t)$, de constante de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 s'écrit
$$\mathscr{E}_{\mathrm{p,él}} = \frac{1}{2}k\big(\ell(t) - \ell_0\big)^2 + \mathrm{cste}$$
- L'<u>**énergie potentielle gravitationnelle**</u> d'un point matériel M de masse m en interaction gravitationnelle avec un astre ponctuel A de masse m_A s'écrit :
$$\mathscr{E}_{\mathrm{p,grav}} = -G \times \frac{m \times m_A}{AM}$$

Attention – Erreur à ne pas commettre

Attention au signe devant mgz pour exprimer l'énergie potentielle de pesanteur.
Toujours vérifier le signe à l'aide du sens physique de l'énergie potentielle :

— Si l'axe (Oz) est ascendant, lorsque z augmente, alors $\mathscr{E}_{\mathrm{pp}}$ doit augmenter, d'où $+mgz$.

— Si l'axe (Oz) est descendant, lorsque z augmente, alors $\mathscr{E}_{\mathrm{pp}}$ doit diminuer, d'où $-mgz$.

III.4 Expression d'une force conservative à l'aide du gradient

III.4.a) Introduction

Pour une force $\overrightarrow{f}$ conservative, le travail élémentaire s'écrit en fonction de la variation infinitésimale de l'énergie potentielle : $\delta W(\overrightarrow{f}) = -\mathrm{d}E_p$

Or par définition du travail élémentaire : $\delta W(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$

On peut alors écrire que la variation infinitésimale de l'énergie potentielle s'écrit : $\mathrm{d}\mathscr{E}_p = -\overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$

Exemple 1.

— Si $\overrightarrow{f} = f_x(x)\overrightarrow{u_x}$, alors $\mathrm{d}\mathscr{E}_p = -f_x(x)\overrightarrow{u_x} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, soit $\mathrm{d}\mathscr{E}_p = -f_x(x)\mathrm{d}x$

La force $\overrightarrow{f}$ s'écrit alors : $\overrightarrow{f} = -\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{u_x}$

— Si, en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{f} = f_r(r)\overrightarrow{u_r}$ (cas des forces centrales : cf chapitre 17), alors $\mathrm{d}\mathscr{E}_p = -f_r(r)\overrightarrow{u_r} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, soit $\mathrm{d}\mathscr{E}_p = -f_r(r)\mathrm{d}r$

La force $\overrightarrow{f}$ s'écrit alors : $\overrightarrow{f} = -\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{u_r}$

III.4.b) Outils mathématiques

Pour généraliser les exemples précédents, nous allons utiliser les notions suivantes :

Définition : Dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables

On définit la dérivée partielle de g par rapport à la variable x, avec y et z maintenues constantes, notée $\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,z}$ par :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,z} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x+\delta x, y, z) - g(x,y,z)}{\delta x}$$

$\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,z}(x_0, y_0, z_0)$ se dit « dérivée partielle de g par rapport à x, à y et z constants, évaluée en x_0, y_0, z_0 », ou se lit « d-rond g sur d-rond x »

Définition : Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables

La différentielle totale d'une fonction g, notée $\mathrm{d}g$, de 3 variables (x,y,z) indépendantes, $g : (x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$, est définie par :

$$\mathrm{d}g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,z} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x,z} \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{x,y} \mathrm{d}z$$

Définition : Opérateur gradient

Soit g une fonction scalaire réelle des trois coordonnées d'un point M, de différentielle $\mathrm{d}g$.

On définit le **vecteur gradient de la fonction scalaire g**, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g$, par :

$$\mathrm{d}g = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(g)\right) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

III.4.c) Force conservative et gradient

Revenons à la définition de l'énergie potentielle : $\exists \mathscr{E}_p$, fonction uniquement des variables d'espace telle que :

$$\begin{aligned} \delta W(\overrightarrow{f}) &= -\mathrm{d}\mathscr{E}_p \\ \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} &= -\mathrm{d}\mathscr{E}_p \\ \text{or } \mathrm{d}\mathscr{E}_p &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathscr{E}_p) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\ \text{donc } \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} &= -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathscr{E}_p) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

À connaître : Lien entre force conservative et énergie potentielle

On dit qu'une force conservative dérive d'une énergie potentielle, et peut s'écrire comme l'opposé du gradient de l'énergie potentielle :

$$\overrightarrow{f} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathscr{E}_p)$$

L'expression du vecteur gradient dépend du système de coordonnées choisies :

REMARQUES

— Le vecteur gradient de la fonction scalaire f en coordonnées cartésiennes s'exprime selon :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \overrightarrow{u_z}$$

— Le vecteur gradient de la fonction scalaire f en coordonnées cylindriques (r, θ, z) s'exprime selon :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z} \overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta} \overrightarrow{u_z}$$

— Le vecteur gradient de la fonction scalaire f en coordonnées sphériques (r, θ, φ) s'exprime selon :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \overrightarrow{u_\varphi}$$

<u>Capacité exigible</u> : Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie.

Exercice de cours D Gradient et énergie potentielle

Utiliser le lien entre une force conservative et l'énergie potentielle et le formulaire des gradients dans les différents systèmes de coordonnées pour répondre aux questions suivantes.

Q1. On donne l'énergie potentielle de pesanteur en coordonnées polaires : $\mathscr{E}_p = -mgr\cos(\theta)$. Exprimer le poids subit par la masse en coordonnées polaires.

Q2. L'énergie potentielle d'un particule chargée q en interaction coulombienne avec une particule chargée q_0 s'écrit, en coordonnées sphériques : $\mathscr{E}_p = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Établir l'expression de la force coulombienne associée.

IV Énergie mécanique

IV.1 Définition

Définition : Énergie mécanique

Soit M un point matériel de masse m. On note $\mathscr{E}_p$ son énergie potentielle qui correspond à la somme des énergies potentielles associées à toutes les forces extérieures conservatives.

L'**<u>énergie mécanique</u>** $\mathscr{E}_m$ du point M est : $\mathscr{E}_m(M/\mathscr{R}) = \mathscr{E}_c(M/\mathscr{R}) + \mathscr{E}_p(M)$

IV.2 Théorème de la puissance mécanique et de l'énergie mécanique

Système étudié : point matériel $M(m)$.
Référentiel d'étude : $\mathscr{R}(O;\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$ supposé galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des forces : $M(m)$ est soumis à des forces $\overrightarrow{f_i}$ de résultante $\sum_i \overrightarrow{f_i}$

À connaître : Théorème de la puissance mécanique

Le **théorème de la puissance mécanique**, dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen énonce que la dérivée par rapport de l'énergie mécanique d'un point matériel $M(m)$ au temps est égale à la somme des puissances des forces **non conservatives** qui s'exercent sur le système :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m(M/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}^{\text{non conservative}}} = \sum \overrightarrow{f_{i,nc}} \cdot \overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$$

À connaître : Théorème de l'énergie mécanique

Le **théorème de l'énergie mécanique**, dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen, énonce que la variation de l'énergie mécanique d'un point matériel $M(m)$ entre deux points A et B de sa trajectoire est égale à la sommes des travaux des forces **non conservatives** entre les deux points A et B :

$$\boxed{\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_m(M/\mathscr{R}) = \sum \mathcal{W}_{AB}^{\text{non conservative}}} = \sum \int_{A\frown B} \overrightarrow{f_{i,nc}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Méthode : Vive le TEM/TPM !

- Utilisez les théorèmes de l'énergie mécanique ou de la puissance mécanique, plutôt que le TEC/TPC
- L'application du TEM/TPM est identique à celle du TEC/TPC :
  - Lors du bilan des actions mécaniques, **distinguer les forces conservatives des forces non conservatives.**
  - Exprimer les énergies potentielles des forces conservatives.
  - Calculer les travaux/puissances uniquement des forces non conservatives. (Les forces conservatives sont déjà prises en compte dans l'énergie potentielle.)
  - Poursuivre l'application du TEM/TPM.

Exercice de cours E   Pendule simple

On étudie le pendule simple : une masse ponctuelle m est accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible sans masse de longueur ℓ, que l'on fait osciller dans un plan vertical. Établir l'équation différentielle du mouvement.

Exercice de cours F   Descente en luge

On étudie la descente en luge de la petite Louise. L'ensemble est assimilé à un point matériel M de masse $m = 20$ kg. La piste est de longueur $L = 100$ m et est inclinée de 11 %. Elle part avec une vitesse nulle du haut de la piste. On néglige les frottements fluides ; les frottements solides sont modélisés par les frottements de Coulomb de coefficient 0,10. Déterminer la vitesse avec laquelle Louise arrive en bas.

IV.3 Mouvement conservatif/non conservatif

<u>Capacité exigible</u> : **Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.**

À connaître : Cas de conservation de l'énergie mécanique

L'**énergie mécanique se conserve**, c'est-à-dire reste constante, si et seulement si la **puissance des forces non conservatives est nulle**, c'est-à-dire ssi le système n'est soumis qu'à **des forces conservatives** et à des **forces non conservatives qui ne travaillent pas**.

Méthode

Si **toutes les forces qui interviennent sont conservatives** (et dont on connaît l'énergie potentielle associée), il est préférable d'**écrire la conservation de l'énergie mécanique** au lieu d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique. Il est en effet beaucoup **plus facile d'exprimer la variation d'énergie potentielle que de calculer le travail d'une force**.

V Mouvements conservatifs à une dimension

Un système à un degré de liberté est un système dont le repérage du système dans l'espace ne nécessite qu'un seul paramètre. Dans le cours on considèrera que le seul paramètre est l'abscisse x des coordonnées cartésiennes. Cela pourrait être également une distance r, un angle θ ... Dans cette partie on considère un système sur lequel s'exercent des forces conservatives $\overrightarrow{F} = F_x(x)\overrightarrow{u_x}$, on définit alors une énergie potentielle résultante $\mathscr{E}_p$, reliée à $\overrightarrow{F}$, qui ne dépend que de x.

V.1 Utilisation du graphe d'énergie potentielle

L'étude dans cette partie est essentiellement qualitative et se fait à partir du graphe de $\mathscr{E}_p$ en fonction de l'unique variable d'espace x, situé ci-dessous.

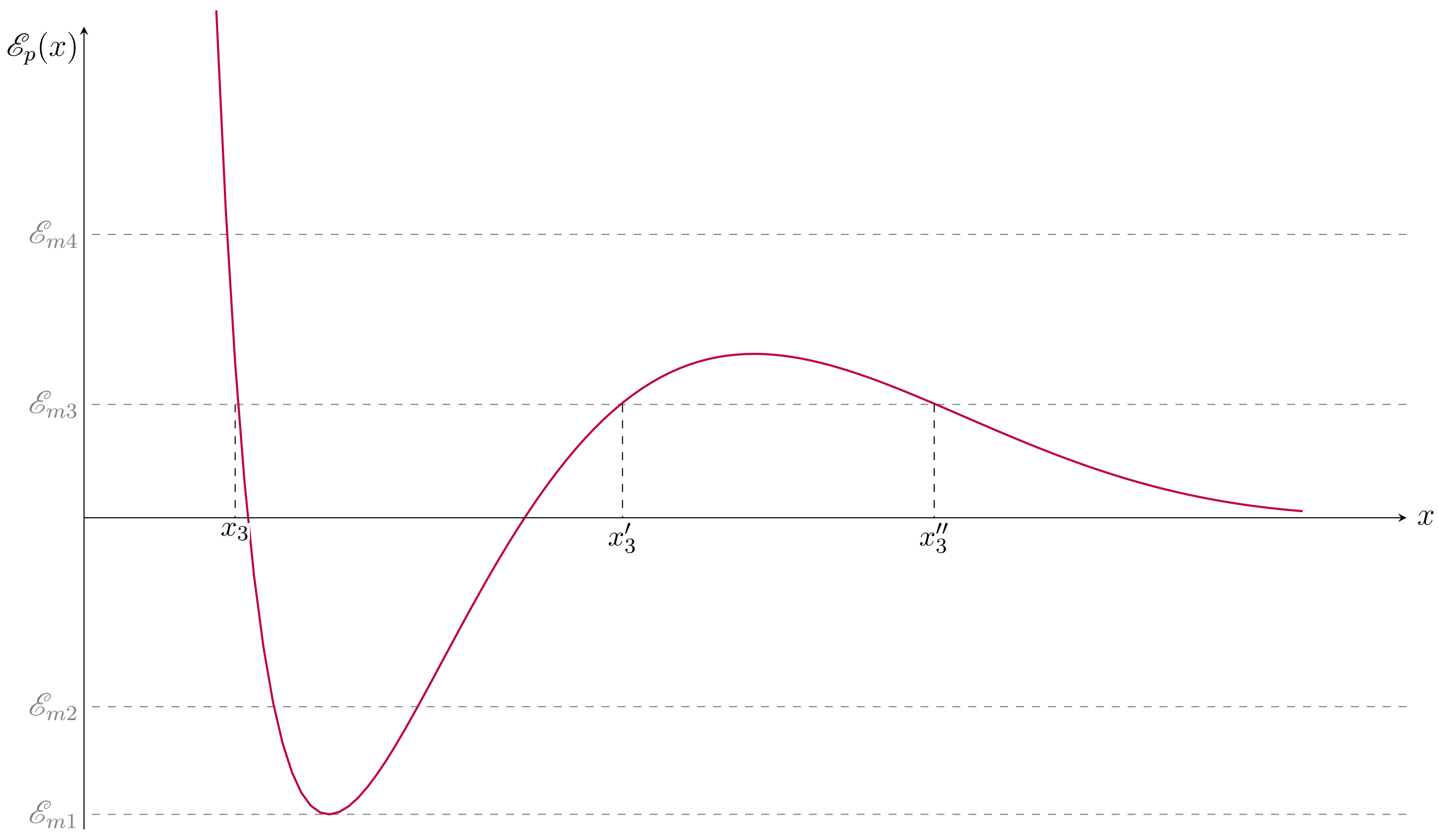


Figure 1 – Énergie potentielle d'un système conservatif à 1 degré de liberté

V.1.a) Sens de la force

<u>Capacité exigible</u> : Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.

Déterminer le sens et l'intensité de la force

Q1. Exprimer la force $\overrightarrow{F}$ en fonction de $\mathscr{E}_p(x)$.

Q2. Dans quel sens est la force $\overrightarrow{F}$ par rapport à $\overrightarrow{u_x}$ selon le sens de variation de $\mathscr{E}_p$? L'indiquer sur le graphe page 13.

Q3. Où la norme de la force est-elle nulle ? maximale ? L'indiquer sur le graphe de la figure 1 page 13.

V.1.b) Position d'équilibre

Définition : Position d'équilibre

On dit que x_e est une **<u>position d'équilibre</u>** ssi lorsqu'on place M en cette position x_e sans vitesse initiale il y reste.

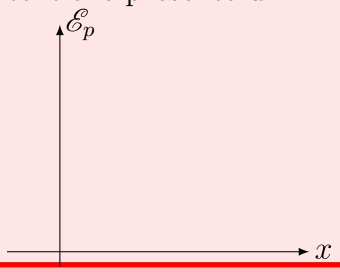
Définitions : Position d'équilibre stable/instable

- On dit qu'une position est un **<u>équilibre stable</u>**, si quand on écarte légèrement un point M de sa position d'équilibre, il apparaît une force qui tend à ramener M vers sa position d'équilibre initiale.
- On dit qu'une position est un **<u>équilibre instable</u>**, si quand on écarte légèrement un point M de sa position d'équilibre, il apparaît une force qui tend à éloigner davantage M de sa position d'équilibre initiale.

<u>Capacité exigible</u> : Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre, et la nature stable ou instable de ces positions.

À connaître

En une position d'**<u>équilibre stable</u>**, l'énergie potentielle présente un ....

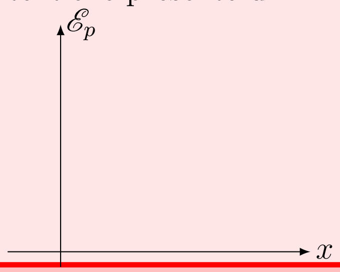


Cela se traduit par :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x}(x_e) = \ldots\ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e) \ldots\ldots\ldots$$

En une position d'**<u>équilibre instable</u>**, l'énergie potentielle présente un ....



Cela se traduit par :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x}(x_e) = \ldots\ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e) \ldots\ldots\ldots$$

Attention – Erreurs à ne pas commettre

- La détermination des positions d'équilibre se fait bien par des calculs de **dérivées par rapport à la variable d'espace** et non par une dérivée temporelle $\cancel{\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}t} = 0}$.
- L'écriture $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x}(x_e) = 0$ signifie que : on commence par dériver $\mathscr{E}_p$ par rapport à x : $\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x}\right)$, PUIS on évalue la dérivée en $x = x_e$ (et non l'inverse !). Le (x_e) se met à la hauteur du trait de fraction et donc également à la hauteur du signe égal, et encore moins au-dessus du trait de fraction.

Identifier les positions d'équilibre et leur stabilité

Q1. Identifier sur le graphe de la figure 1 page 13 les positions d'équilibre.

Q2. Déterminer la stabilité de ces positions d'équilibre.

V.1.c) Nature des trajectoires à partir de la courbe de $\mathscr{E}_p(x)$

<u>Capacité exigible</u> : **Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.**

Positions accessibles ?

Q1. Quelle inégalité est vérifiée par l'énergie mécanique $\mathscr{E}_m$ et l'énergie potentielle $\mathscr{E}_p(x)$?

Q2. Comment exploiter le graphe de $\mathscr{E}_p$ pour déterminer les positions accessibles par le système ?

Définitions : Trajectoire bornée / non bornée

- Si les états accessibles de M sont bornés, c'est-à-dire $x \in [x_{\text{inf}}, x_{\text{sup}}]$, on dit que la **trajectoire de** M **est bornée**. La conservation de l'énergie mécanique assure alors que le mouvement est périodique : le point M va osciller entre les deux bornes.
- Si les états accessibles de M ne sont pas bornés, c'est-à-dire $x \in [x_{\text{inf}}, +\infty[$, on dit que **la trajectoire de** M **n'est pas bornée**. Le point M peut alors s'éloigner à l'infini.

Étude des trajectoires à partir de la courbe $\mathscr{E}_p(x)$

À l'aide du graphe de la figure 1 page 13, décrire la nature du mouvement du point M selon la valeur de l'énergie mécanique : $\mathscr{E}_{m1}$, $\mathscr{E}_{m2}$, $\mathscr{E}_{m3}$ et $\mathscr{E}_{m4}$. Pour chaque valeur de $\mathscr{E}_m$, décrire les positions de vitesse nulle.

- Si $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_{m1}$: une seule position satisfait à la condition $\mathscr{E}_m \geq \mathscr{E}_p(x)$, donc la seule position accessible est x_{e1}. Le système est donc immobile à la position d'équilibre x_{e1}.
- Si $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_{m2}$: les positions qui satisfont à la condition $\mathscr{E}_m \geq \mathscr{E}_p(x)$ sont comprises entre x_2 et x_2' : la **trajectoire est donc bornée**.
  - En $x = x_2$ ou $x = x_2'$, $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_p$, alors $\mathscr{E}_c = 0$, donc ce sont des **positions de vitesse nulle**.
  - Supposons qu'initialement, M se trouve en x_2 avec une vitesse nulle.
    - x_2 n'étant pas une position d'équilibre, M va nécessairement se déplacer, la seule position possible est au-delà de x_2, donc M va se déplacer dans le sens des x croissants.
      M se dirigeant vers des positions d'énergie potentielle plus faible, son énergie cinétique va augmenter jusqu'en x_{e1}.
    - M passe en x_{e1} avec une vitesse non nulle, et ne s'y arrête donc pas. M poursuit vers les x croissants, pour lesquels $\mathscr{E}_p$ augmente, donc $\mathscr{E}_c$ diminue. Jusqu'à x_2', où $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_p$, la vitesse de M s'annule.
      x_2' n'étant pas une position d'équilibre M va nécessairement se déplacer, la seule position possible est en-dessous de x_2', donc M va se déplacer dans le sens des x décroissants, et donc emprunter le chemin exactement inverse avec la même vitesse en valeur absolue.
    - Et ainsi de suite.

  Le mouvement de M est alors ici **périodique** : M oscille périodiquement entre x_2 et x_2'. (attention, périodique ne veut pas dire sinusoïdal !).
- Si $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_{m3}$: les positions qui satisfont à la condition $\mathscr{E}_m \geq \mathscr{E}_p(x)$ sont $x \in [x_3, x_3']$ et $x \in [x_3'', +\infty[$
  En $x = x_3$ ou $x = x_3'$ ou $x = x_3''$, $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_p$, alors $\mathscr{E}_c = 0$, donc ce sont des **positions de vitesse nulle**.
  Les positions accessibles au point M dépendent de sa position initiale.
  Si $x(0) \in [x_3, x_3']$, alors la **trajectoire** de M sera **bornée**.
  Si $x(0) \in [x_3'', +\infty[$, alors M pourra s'éloigner à l'infini, la **trajectoire n'est donc pas bornée**.
- Si $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_{m4}$, alors toutes les positions $x \in [x_4, +\infty[$ sont accessibles, la **trajectoire n'est pas bornée**.

V.1.d) Barrière et puits de potentiel

Capacité exigible : Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel.

Définition : barrière de potentiel

Une **barrière de potentiel** est une énergie potentielle dont la dépendance spatiale est caractérisée par une région d'énergie potentielle maximale.

Considérons la situation décrite sur la figure 1. Supposons que M se trouve initialement en $x_0 > x_3''$ avec une «vitesse» $\dot{x} < 0$. Au cours du temps, x diminue et le point M se rapproche de l'état x_3''. Il atteint ce point avec une «vitesse» nulle, puisque $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_p(x_3)$ et subit une force $f_x = -\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x} > 0$ de sorte que le M repart dans l'autre sens. La position $x = x_3''$ agit ainsi comme une barrière infranchissable.

Définition : puits de potentiel

Un **puits de potentiel** est une énergie potentielle dont la dépendance spatiale est caractérisée par une région d'énergie potentielle minimale dans lequel un système peut être piégé.

Supposons maintenant la situation où x_0 se trouve entre x_3 et x_3'. Le point M va atteindre la barrière x_3' avec une vitesse nulle, puis rebrousser chemin pour rencontrer une autre barrière en x_3. Finalement le point va osciller entre ces deux états : on dit que le M est piégé dans un puits de potentiel.

V.2 Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

Soit x_e **une position d'équilibre stable** d'un système conservatif à 1 ddl d'énergie potentielle $\mathscr{E}_p(x)$.

On a donc, en x_e : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x}(x_e) = 0 \text{ et } \dfrac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e) > 0}$

On étudie le **mouvement de faible amplitude du système autour de l'équilibre stable x_e**.

Capacité exigible : Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.

Établir l'équation différentielle au voisinage d'une position d'équilibre stable

Q1. Exprimer l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre x_e en utilisant le développement de Taylor au deuxième ordre.

Q2. En déduire l'expression de l'énergie mécanique au voisinage de la position d'équilibre.

Q3. Que peut-on dire de l'énergie mécanique dans le cadre de l'étude ?

Q4. Exprimer la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps. Et en déduire l'équation différentielle du mouvement ?

Q5. Quelle est la nature de l'équation différentielle ? En identifier sa caractéristique.

À connaître : Mouvements conservatifs au voisinage d'un équilibre stable

L'équation du mouvement d'un **système conservatif à un degré de liberté**, **au voisinage d'une position x_e d'équilibre stable** est celle d'un **oscillateur harmonique**

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - x_e) = 0 \text{ de pulsation propre } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e)}$$

Le point M oscille donc au voisinage de la position d'équilibre stable x_e avec une période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

V.3 Étude numérique : Effets de non-linéarité

<u>Capacité numérique exigible</u> : **À l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.**

V.3.a) Position du problème

L'équation différentielle du pendule simple

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

ne peut pas être résolue analytiquement. On peut la résoudre numériquement à l'aide de l'algorithme d'Euler (le plus simple à mettre en œuvre, mais aussi le moins précis) ou à l'aide d'algorithmes plus évolués qui sont déjà programmés dans certaines bibliothèques python.

Cependant, la méthode d'Euler, ou les autres algorithmes de résolution numérique permet de résoudre numériquement des équations différentielles du premier ordre du type $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = f(t, X)$ avec $X(t_0) = X_0$ (CI).

Résolution numérique d'une équation différentielle du 2$^{\mathrm{e}}$ ordre non linéaire

Q1. Réécrire l'équation différentielle du mouvement du pendule simple sous la forme d'un problème du premier ordre c'est-à-dire $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = f(t, X)$, en posant $X = \begin{pmatrix} \theta \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$.

Q2. Écrire la fonction `f_pendule(t,X)` qui définit l'équation différentielle selon la relation précédente.

Q3. Utiliser la documentation de `solve_ivp` pour résoudre l'équation du pendule simple.

Q4. Écrire les instructions permettant de tracer la courbe de θ en fonction du temps pour $m = 100$ g, $\ell = 10$ cm. On prendra $t_0 = 0$, $t_f = 4T_0$ (T_0 est la période propre des petites oscillations) , $N = 10000$ pas de calculs et successivement $\theta(0) = 0,1$ rad; $0,3$ rad; 1 rad; 2 rad; 2.8 rad

Q5. Commenter les courbes obtenues. Qu'observe-t-on pour les faibles amplitudes ? Que se passe-t-il quand l'amplitude du mouvement n'est plus petite devant 1 rad ? Le mouvement est-il toujours harmonique ? A-t-on toujours isochronisme des oscillations ?

Méthode : Manipulation des tableaux de `numpy`

Cf polycopié distribué en TP « Boîte à outils Python »

V.3.b) Réécriture de l'équation différentielle

$$\text{On réécrit l'équation différentielle : } \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

$$\text{sous la forme : } \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = f(t, X)$$

Pour cela, on introduit $X = \begin{pmatrix} \theta \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \end{pmatrix} \\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ -\omega_0^2\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= f\left(t, \begin{pmatrix} \theta \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}\right) \\
\text{avec } f(t,X) = f\left(t, \begin{pmatrix} \theta \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ -\omega_0^2\sin(\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On peut écrire la fonction `f_pendule(t,X)` qui définit l'équation différentielle.

```
def f_pendule(t,X):
    # X tableau, où X[0] est theta(t), X[1] est dtheta/dt(t)
    f0 = X[1]     # 1er élément : dérivée de theta(t)
    f1 = -w0**2*np.sin(X[0]) # 2è élément : dérivée seconde donnée par l'ED
    return np.array([f0,f1]) # renvoie la liste des deux fonctions
```

V.3.c) Utilisation de `solve_ivp`

On utilise la fonction `solve_ivp` qui permet de résoudre les équations différentielles sous la forme

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$$

avec la condition initiale $y(0) = y_0$, où y est un vecteur de taille N et f une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. Dans le cas du pendule simple, la fonction f va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. La fonction `solve_ivp` attend 4 variables :

- la fonction $f(t,y)$
- l'intervalle de temps de résolution
- le vecteur de condition initiale y_0
- le tableau des instants de résolution

```
resol=sci.solve_ivp(f_pendule,(t0,tf),np.array([2.8,0]),t_eval=liste_t)
#resol.t contient les instants de résolutions
#resol.y est le tableau des valeurs de y, chaque colonne correspondant à un
   instant de résolution. La 1ière ligne correspond ici aux valeurs de theta,
    la 2ième ligne aux valeurs de dtheta/dt
theta=resol.y[0]
dtheta_sur_dt=resol.y[1]
```

V.3.d) Résolution et commentaires

Pour résoudre l'équation différentielle, il est nécessaire de commencer par définir les différents paramètres utiles :

```
g=0.81 # m/s2
l=0.10 # m
w0=np.sqrt(g/l) # pulsation propre
t0 = 0
tf = 4*2*np.pi/w0 # choix de tf (4 périodes propres)
N=10000  # nombre de pas de calculs
liste_t = np.linspace(t0,tf,N+1) # liste des N+1 instants de calculs
```

Puis, on effectue la résolution à proprement parlé en appliquant la fonction `Euler` à notre problème avec les paramètres définis précédemment.

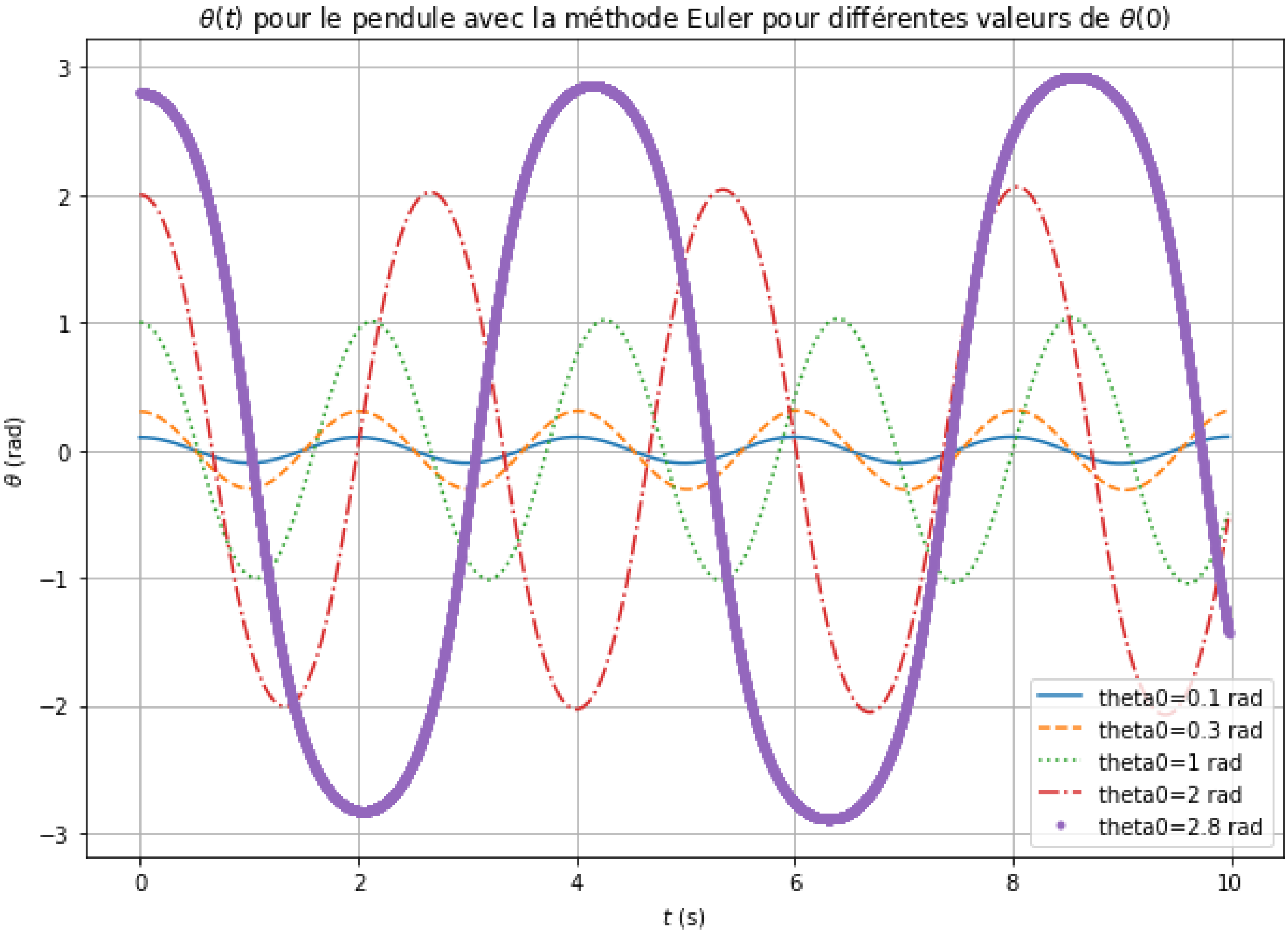
```
theta0=2 # rad -> à choisir
dtheta0=0 # rad/s -> à choisir
CI= np.array([theta0,dtheta0]) # conditions initiales
solution = solve_ivp(f_pendule,(t0,tf),CI,t_eval=liste_t)
#récupération des angles aux différents instants
theta=solution.y[0] # première ligne du tableau
```

Enfin, pour visualiser l'évolution temporelle, on représente la courbe de θ en fonction du temps

```
plt.plot(liste_t,theta)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('theta')
plt.show()
```

Pour visualiser les effets de la non linéarité de l'équation différentielle, résolvons-la pour différentes valeurs de l'angle initial, allant des petites valeurs (pour lesquelles nous avons résolu analytiquement l'équation différentielle en la linéarisant) à des valeurs plus importantes.

```
# On définit la liste des angles et/ou vitesses initiales que l'on veut
  étudier
liste_theta0=[0.1,0.3,1,2,2.8]
plt.figure() # on trace toutes les évolutions sur le même graphe
for theta0 in liste_theta0: # pour les différentes valeurs de theta0
    CI= np.array([theta0,0]) # tableau des conditions initiales
    # pour chaque valeur de theta0 on résout numériquement l'équation
  différentielle
    solution = solve_ivp(f_pendule,(t0,tf),CI,t_eval=liste_t)
    # on récupère la liste des theta
    theta=solution.y[0]
    #  tracé de theta(t)
    plt.plot(liste_t,theta)
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('theta (rad)')
plt.grid()
plt.show()
```



Commentaires :

- Pour un angle initial de 0,10 rad (faible devant 1 rad), et 0,3 rad, les oscillations du pendule sont harmoniques (sinusoïdales) et la période des oscillations est celle des petites oscillations $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2$ s.
- Pour des angles initiaux plus importants, on constate que la période des oscillations est d'autant plus grande que l'angle initial est grand. La période dépend des conditions initiales, il n'y a plus isochronisme des oscillations (observé uniquement pour des oscillations d'amplitude faible devant 1 rad).
- Les oscillations du pendule sont toujours périodiques mais ne sont plus sinusoïdales (harmoniques) quand l'amplitude du mouvement n'est plus petite devant 1 rad.