Partie I. Signaux Physiques

Devoir Maison n°12 – Tir d'artillerie

À rendre pour le mardi 30 janvier 2018

Comment chercher un D.M. ?

- Commencer à chercher le DM, **dès le soir de la distribution de l'énoncé**,
- **Avec le chapitre et les exercices ouverts** sous les yeux.
- Chercher **en groupe**.
- En cas de blocage, **poser des questions**, à la fin d'un cours ou par mail : `nvalade.pcsi@gmail.com`
- La réponse à un problème de physique doit contenir :
  - des **schémas** grands, clairs et complets ;
  - des **phrases** qui expliquent votre raisonnement ;
  - les calculs **littéraux**, avec uniquement les **grandeurs littérales** définies par l'énoncé (ou par vous-même si elles ne le sont pas par l'énoncé) ;
  - les applications numériques avec un nombre adapté de chiffres significatifs et une **unité**.
- Après avoir récupéré votre copie et le corrigé, retravailler votre copie afin de comprendre ce qui vous a posé problème.

ATTENTION : vous avez exceptionnellement deux semaines pour traiter ce DM qui est **plus long** que les autres. **Commencez le tôt** ! N'attendez pas la dernière minute, vous n'auriez pas le temps de le faire convenablement.

Les questions précédées d'une (*) sont très proches du cours et doivent donc être parfaitement traitées.

On considère un canon lançant depuis un point O au niveau du sol un boulet de masse m avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle θ_0 avec le sol. La vitesse $\overrightarrow{v_0}$, supposée incluse dans le plan Oxz ((Ox) horizontal et (Oz) vertical ascendant) est de norme v_0 fixée à la construction du canon, mais l'angle qu'elle fait avec l'horizontale est réglable en inclinant plus ou moins le canon. Le boulet est modélisé par un point matériel.
On négligera les frottements dans un premier temps.

Trajectoire du boulet

1. (*) Montrer que le mouvement du boulet se fait à vecteur accélération constant.

2. (*) Établir les équations horaires du boulet $(x(t), y(t), z(t))$ au cours du temps. En déduire que le mouvement du boulet est plan.

3. (*) Montrer que la trajectoire du boulet a pour équation

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta_0)}x^2 + \tan(\theta_0)x$$

4. (*) Représenter l'allure de la trajectoire. La figure devra être complétée par la suite.

Portée du tir

5. (*) Déterminer la portée du tir L_0, c'est-à-dire la distance à laquelle le boulet retombe sur le sol, à exprimer en fonction de v_0, de l'accélération de la pesanteur g, et de θ_0. On rappelle la relation trigonométrique $\sin(2u) = 2\cos(u)\sin(u)$.

6. (*) Vérifier l'homogénéité de l'expression de L_0 obtenue. Vérifier sa cohérence sur deux cas limites simples que vous choisirez.

7. (*) La vitesse initiale étant fixée, déterminer sans calcul supplémentaire ou presque l'angle θ_0 qui donne la portée maximale $L_{\max}$ dont on précisera l'expression.

8. (*) Considérons le cas limite théorique où le boulet serait lancé à la verticale. Quelle est la durée de la phase montante de sa trajectoire ? Montrer qu'il peut atteindre une hauteur maximale $h_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2g}$. Comment cette hauteur est-elle reliée à la portée maximale $L_{\max}$?

Parabole de sûreté *(Partie un peu plus délicate.)*

9. En utilisant la relation trigonométrique $1 + \tan^2(u) = \dfrac{1}{\cos^2(u)}$, montrer qu'un point de coordonnées (x, z) ne peut être atteint par le boulet que si il existe une valeur de θ_0 telle que

$$gx^2 \tan^2(\theta_0) - 2v_0^2 x \tan(\theta_0) + 2v_0^2 z + gx^2 = 0$$

10. En déduire que les points atteignables sont délimités par

$$z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Justifier le nom de « parabole de sûreté ».

11. Cette relation est-elle compatible avec les valeurs de $h_{\max}$ et $L_{\max}$ déterminées précédemment ?

12. Sur la figure tracée précédemment, représenter la parabole de sûreté et légender la figure avec $h_{\max}$ et $L_{\max}$.

13. Justifier qu'il existe deux trajectoires possibles, appelées « tendue » ou « en cloche », pour atteindre un point situé sous la parabole de sûreté.

Prise en compte des frottements

On tient maintenant compte du freinage dans l'air, et on modélise la force de freinage par une traînée quadratique s'écrivant sous la forme $\overrightarrow{F} = -\beta \left\| \overrightarrow{v} \right\| \overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse du boulet et $v = \left\| \overrightarrow{v} \right\|$ sa norme, et β un coefficient phénoménologique.

14. (*) Déterminer la dimension du coefficient phénoménologique β.

15. (*) Au terme d'un régime transitoire, le boulet atteint une vitesse limite constante de norme V_{lim}. Cette vitesse dépend potentiellement de la masse m du boulet, de l'accélération de la pesanteur g et bien sûr du coefficient de frottement β. Déterminer son expression à une constante multiplicative près par analyse dimensionnelle.

16. (*) Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\overrightarrow{v}$ du boulet.

Cherchons une solution particulière constante à cette équation différentielle, notée $\overrightarrow{V_\infty}$. On admet que cette solution s'interprète physiquement comme la vitesse limite de fin de chute.

17. (*) Déduire de l'équation différentielle une relation non-linéaire vérifiée par $\overrightarrow{V_\infty}$ et qui implique également sa norme.
En déduire que $\overrightarrow{V_\infty}$ correspond à un mouvement rectiligne uniforme vertical puis que la norme de cette vitesse limite est conforme au résultat de l'analyse dimensionnelle.