

? Lundi 5 février 2024  
Devoir Surveillé n°7 (1) – Durée : 4 heures

La calculatrice est **AUTORISÉE**.

**Consignes à respecter**

- Lire la **totalité** de l'énoncé et commencer par les exercices les plus abordables.
- Présentation de la copie :
  - Prendre une **nouvelle copie double pour chaque exercice**.
  - Tirer un **trait horizontal** à travers toute la copie **entre chaque question**.
  - Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
  - **Numéroter les pages** sous la forme x/nombre total de pages.
- Rédaction :
  - Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
  - **Justifier** toutes vos réponses.
  - Applications numériques : nombre de **chiffres significatifs adapté** et avec une **unité**.

Ce sujet comporte 6 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 8 pages.

**Données**

- Formule de Fresnel :

$$I(M) = 2I_0(1 + \cos(\Delta\varphi(M)))$$

- 

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

- Lois de Coulomb du frottement, de coefficient de frottement  $f$  :

- en présence de glissement :  $\|\vec{R}_T\| = f\|\vec{R}_N\|$  ;
- en l'absence de glissement :  $\|\vec{R}_T\| < f\|\vec{R}_N\|$ .

**Exercice n°0 Un peu de culture !**

Qui est-ce ? Qu'a-t-il fait ? De quel siècle est-il ?

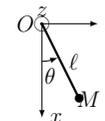


**Exercice n°1 Questions de cours sur l'énergie (MAX 15 min)**

- Q1. Définir le travail élémentaire de la force  $\vec{F}$  s'exerçant sur  $M$ .
- Q2. Définir le travail de la force  $\vec{F}$  s'exerçant sur  $M$  se déplaçant entre  $A$  et  $B$ .
- Q3. Définir la puissance de la force  $\vec{F}$  s'exerçant sur  $M$ .
- Q4. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.
- Q5. Qu'est-ce qu'une force conservative ?
- Q6. Donner l'énergie potentielle élastique.

**Exercice n°2 Pendule simple (~ 30 min)**

On considère un pendule simple constitué d'un point  $M$  de masse  $m$  accroché à l'extrémité d'un fil inextensible, de longueur  $\ell$  sans masse et sans rigidité. L'autre extrémité  $O$  est fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire terrestre, considéré galiléen dans le cadre de l'étude. On néglige les frottements dus à l'air.



- Q1. Quel est le mouvement du point  $M$  ? Quel est le système de coordonnées adapté ? Établir dans ce système de coordonnées, le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point  $M$ , en fonction de  $\ell$ ,  $\theta$  et ses dérivées, et des vecteurs de la base adaptée.
- Q2. Faire le bilan des forces et représenter les forces sur le schéma précédent.
- Q3. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par  $\theta$  en utilisant deux méthodes différentes :
  - (a) le principe fondamental de la dynamique,
  - (b) un théorème énergétique.
 Quelle est la nature de cette équation différentielle ?

On se place, dans la suite, dans le cadre des mouvements de petite amplitude :  $|\theta|$  reste très petit devant 1 rad.  
 Q4. Linéariser l'équation différentielle dans ce cas. Quel nom porte un système vérifiant une telle équation ?  
 Q5. La résoudre avec les conditions initiales suivantes :  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

**Exercice n°3 Descente en luge (~ 30 min)**

Le petit Gabriel, presque 3 ans, fait de la luge sur une pente enneigée d'angle  $\alpha = 5^\circ$ . Les frottements de la luge avec la neige sont modélisés par les lois de Coulomb du frottement solide de coefficient de frottement  $f = 0,05$ .

On note  $m = 15$  kg la masse totale du système {Gabriel + luge}.

On note  $x(t)$  la distance parcourue au cours du temps le long de la piste.

À  $t = 0$ , le petit Gabriel sur sa luge, situé à l'origine  $O$  de l'axe  $(Ox)$ , est poussé par sa grande sœur, Louise, avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ , où  $v_0 = 2$  km · h<sup>-1</sup>.

On notera  $(Ox)$  l'axe dans la direction de la pente et  $(Oy)$  l'axe perpendiculaire à la pente.

- Q1. Faire un schéma précis de la situation. Faire un bilan des forces, et représenter les forces sur le schéma.
- Q2. Par application du principe fondamental de la dynamique, établir deux équations scalaires, reliant  $\ddot{x}$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $\|\vec{R}_T\|$ ,  $\|\vec{R}_N\|$
- Q3. À partir de l'une d'elle, obtenir l'expression de  $\|\vec{R}_N\|$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $\alpha$ . En déduire l'expression de  $\|\vec{R}_T\|$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $\alpha$  et  $f$ .
- Q4. En déduire l'équation différentielle du mouvement

$$\ddot{x} = g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha))$$

- Q5. En déduire l'équation horaire  $x(t)$ .

Q6. Comment évolue la vitesse au cours de la descente ? On s'appuiera sur une évaluation numérique.

Pour des raisons de sécurité, Gabriel n'ayant même pas trois ans, la vitesse atteinte par la luge doit être de  $v_{\max} = 15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

Q7. Déterminer l'expression de la longueur maximale de la piste de luge pour qu'il en soit ainsi, en fonction de  $v_0, g, \alpha$  et  $f$ .

Faire l'application numérique.

### Exercice n°4 Trajectoire d'une bille de plomb (~ 1h30)

#### Données

- On suppose l'accélération de la pesanteur égale à  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ , avec  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
- Le référentiel terrestre est supposé galiléen.
- Masse volumique du plomb solide :  $\rho = 11350 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .
- Masse volumique de l'air :  $\rho_a = 1,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Un fusil de chasse (arme à feu) ou de ball-trap permet d'envoyer à distance des projectiles au moyen de gaz produits par la combustion rapide et confinée d'un composé chimique. La déflagration va éjecter de la bouche du fusil les sphères de plomb qui étaient dans la cartouche avec une vitesse qui, en moyenne, vaut  $v_0 = 380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , valeur à utiliser dans toutes les applications numériques ultérieures.

#### Document 1.

Les données suivantes sont fournies par un fabricant de cartouches de fusil de chasse (contenant de la grenaille de plomb ou de fer doux, dont les projectiles sont appelés « plombs » quelle que soit leur nature). La vitesse de vol des billes de plomb dépend en premier lieu de leur taille. Avec une même vitesse de départ on obtient des différences considérables puisque, en raison de leur masse moins importante, les plombs de petit diamètre perdent plus de vitesse pour une même distance parcourue, face à la résistance de l'air à laquelle ils sont confrontés. La distance de sécurité de la grenaille de plomb, c'est-à-dire la distance au-delà de laquelle il n'y a plus danger pour les tiers, peut être déterminée à partir de la règle grossière suivante : diamètre des plombs  $\times 100 =$  zone dangereuse en m. Exemple : pour des plombs de 3 mm :  $3 \times 100 = 300 \text{ m}$ . Voilà la distance maximale possible avec l'angle de tir le plus favorable, à ne pas confondre avec la portée utile, qui est beaucoup plus faible. Dans le cas de la grenaille de fer doux, cette distance de sécurité est nettement plus faible en raison de la moindre densité des billes. Par contre, en cas d'agglutination, les billes agglutinées constituent des projectiles d'un poids supérieur qui peuvent être dangereux à des distances beaucoup plus grandes. Selon la taille des grains, la portée utile avec de la grenaille de plomb est de 35 à 40 m tout au plus. Au-delà, la dispersion est trop grande de sorte qu'il n'y a plus de couverture suffisante. La puissance de pénétration et la létalité des plombs diminuent avec l'augmentation de la distance de tir et ce, d'autant plus rapidement que les plombs sont plus petits.

Nous allons vérifier ces affirmations. Nous considérons la trajectoire d'un plomb de cartouche dont la dimension est typiquement de quelques millimètres et la masse inférieure au gramme. On néglige la poussée d'Archimède.

#### Partie I Équation du mouvement

Le projectile est a priori soumis à deux forces : son poids et la force de frottement fluide exercée par l'air qui, dans les cas considérés, est constituée de la traînée aérodynamique qui s'écrit  $\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho_a S C_D v \vec{v}$  où  $v$  est la norme du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du projectile,  $\rho_a$  est la masse volumique de l'air,  $S = \pi R^2$  est la section de l'objet exposée au fluide dans la direction de l'écoulement et  $C_D$  est un coefficient sans dimension appelé « coefficient de traînée ». Pour les vitesses typiques étudiées (vitesses supersoniques situées entre 375 et 420 m/s) et pour les formes quasi-sphériques de projectiles,  $C_D$  est de l'ordre de 0,44.

Q1. Établir l'équation différentielle du mouvement du centre de masse du plomb de masse  $m$ .

On confondra, par la suite, le plomb avec une masse ponctuelle à laquelle on appliquera la force de traînée aérodynamique.

#### Partie II Premier modèle : trajectoire gravitaire

On considère le cas où la **vitesse initiale du projectile est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air.**

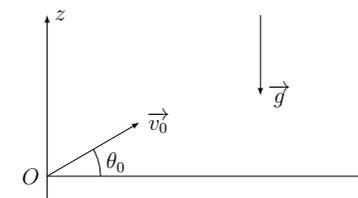
Q2. Montrer qu'on peut négliger la force de frottement fluide devant le poids de la bille à condition que la vitesse initiale  $v_0$ , obéisse à l'inégalité  $v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}$ .

Par la suite on notera  $v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}$ .

On néglige dans la suite la force de frottement fluide.

Q3. Réécrire l'équation du mouvement dans ce cadre, et la projeter sur la base cartésienne.

On note  $\theta_0$  l'angle de la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  avec le plan horizontal. On prend un repère tel que  $\vec{v}_0 = v_0(\cos(\theta_0)\vec{u}_x + \sin(\theta_0)\vec{u}_z)$  et dont l'origine O est la position de la particule à l'instant initial.



Q4. Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.

Q5. Établir l'équation de la trajectoire. Quelle est la nature de cette trajectoire dite « gravitaire » ?

Q6. Montrer que la portée du tir, c'est-à-dire la distance atteinte par le projectile dans le plan horizontal de départ ( $z = 0$ ), vaut  $x_M = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$  et que la hauteur maximale atteinte par le projectile vaut

$$H_M = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}.$$

Q7. Déterminer la valeur de l'angle  $\theta_0$  pour laquelle la portée est maximale.

#### Q8. Application numérique

La taille des plombs est identifiée par un numéro allant de 1 à 12 qui correspond à une régression arithmétique des diamètres de 0,25 mm par numéro. Une cartouche de n°8 possède des plombs plus petits qu'une de n°4.

Le tableau 1 ci-contre donne les rayons de quelques types de plombs et certains résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-dessus pour une vitesse initiale  $v_0 = 380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Compléter les valeurs manquantes sur le tableau ci-contre avec deux chiffres significatifs.

Q9. Comparer la portée maximale, obtenue pour un angle  $\theta_0 = 45^\circ$ , à la portée donnée dans le document 1 et conclure. Quel(s) autre(s) facteur(s) montre(nt) qu'il faut abandonner le modèle gravitaire ?

n° du plomb	1	5	10
Rayon (mm)	2,0	1,5	0,875
Masse $m$ (g)	0,38		0,031
Portée $x_M$ (km)			
$v_\infty \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	33		22

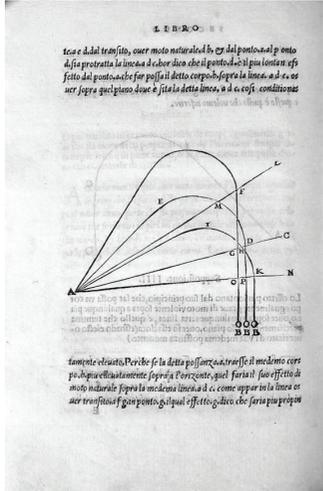
Tableau 1

### Partie III Deuxième modèle : Trajectoire de Tartaglia

On vient de voir dans l'étude précédente que, pour les plombs de chasse,  $v_0$  est très supérieure à  $v_\infty$ , on ne peut donc plus négliger la force de frottement fluide.

Dans ce cas, la trajectoire diffère considérablement de la trajectoire gravitaire. On distingue 3 phases : une première phase à mouvement rectiligne, une deuxième phase à trajectoire asymétrique autour d'un sommet et une troisième phase de mouvement de chute verticale.

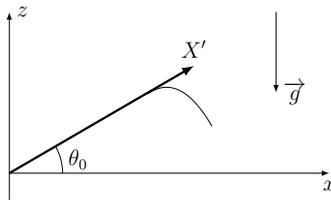
Il s'agit d'une « trajectoire de Tartaglia », du nom du mathématicien balisticien Niccolò Tartaglia (XVI<sup>e</sup> siècle, portrait ci-dessous), qui a décrit les trajectoires (extrait ci-dessous) d'un boulet de canon.



#### A Phase initiale : mouvement rectiligne ascendant

Soit  $OX'$  la direction de la trajectoire rectiligne dans cette phase initiale.

On note  $X'$  l'abscisse du point  $M$  sur cette droite qui fait un angle  $\theta_0$  avec  $Ox$  et  $\vec{v}$  sa vitesse.



L'équation différentielle s'écrit durant cette phase :

$$\frac{d\vec{v}}{dX'} = -\frac{g}{v_\infty^2} \vec{v} = -\frac{\vec{v}}{D}$$

avec  $D = \frac{v_\infty^2}{g}$ .

Q10. Montrer que  $\vec{v}(X')$  s'exprime selon :

$$\vec{v}(X') = v_0 e^{-\frac{X'}{D}}$$

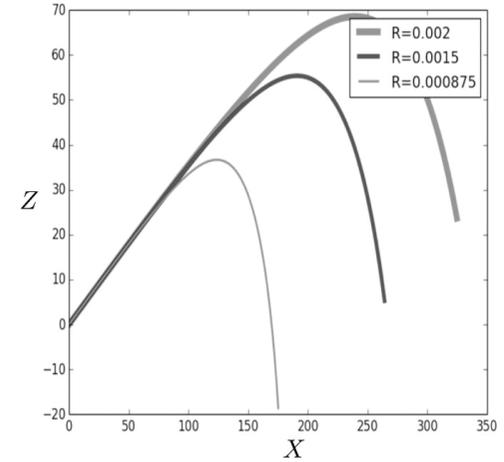
Quelle est la dimension de  $D$ ? Que représente le paramètre  $D$ ?

#### B Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

On note que cette phase est quasiment verticale.

Durant cette phase, le poids et la force de frottement fluide sont d'importance équivalente et doivent donc être prises en compte.

Q11. Reprendre l'équation différentielle de la question Q1, et établir l'expression de la vitesse limite atteinte pendant cette dernière phase.



Pour calculer plus précisément la portée utile du tir de grenaille de plomb, on intègre numériquement l'équation du mouvement.

La figure ci-contre donne les trajectoires des plombs n°1, 5 et 10 de vitesse initiale  $v_0 = 380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , pour l'angle  $\theta_0$  optimisant la portée maximale.

Les valeurs des coordonnées et des rayons sont en mètres.

Q12. Évaluer les portées maximales pour chaque calibre et comparer aux données du document 1.

## Exercice n°5 Trous d'Young (~ 30 min)

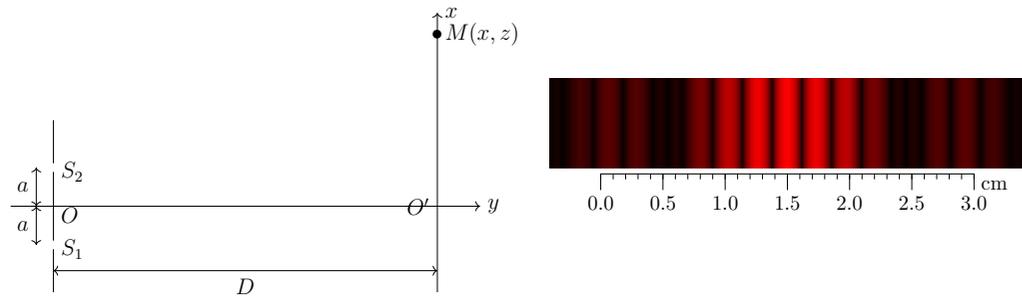
En 1802, l'expérience dite des « trous d'Young » a permis de confirmer la nature ondulatoire de la lumière en réalisant une figure d'interférence lumineuse.

Une version moderne de cette expérience consiste à éclairer avec une lumière laser de longueur d'onde  $\lambda$  deux fentes parallèles distantes de  $2a$  et d'épaisseurs très inférieures à  $2a$ . Sur un écran situé à une distance  $D \gg a$ , on observe la lumière qui a traversé le système. On fait l'hypothèse que le problème est invariant selon la direction des fentes et on travaille dans le plan médiateur ( $Oxy$ ) de ces dernières. On note  $S_1$  et  $S_2$  les points des fentes appartenant à ce plan et  $O$  le milieu de ces points. On suppose que les ondes sont en phase en  $S_1$  et  $S_2$ .

L'axe  $Oy$  est perpendiculaire au plan contenant les fentes, l'axe  $O'x$  se trouve sur l'écran, perpendiculaire à  $Oy$ . Les notations sont schématisées ci-dessous.

Le point courant  $M$  est repéré par son ordonnée  $x$ .

La photographie ci-dessous reproduit ce qui est visualisé sur l'écran pour un laser de longueur d'onde  $\lambda = 633$  nm et une distance  $D = 1,20$  m.



Q1. Exprimer la différence de marche en  $M$  en fonction de  $S_1M$  et  $S_2M$ .

Q2. Exprimer les distances  $S_1M$  et  $S_2M$  en fonction de  $x$ ,  $z$ ,  $a$  et  $D$ . Effectuer les approximations légitimes et nécessaires.

En déduire l'expression de la différence de marche en fonction de  $x$ ,  $a$  et  $D$ .

Q3. Donner l'expression de l'intensité  $I(x)$  en un point d'abscisse  $x$  sur l'écran, en fonction de l'intensité  $I_0$  de l'onde lumineuse au niveau de chaque trou, de  $a$ ,  $\lambda$ ,  $D$  et  $x$ .

Q4. Après avoir rappelé sa définition, établir l'expression de l'interfrange  $i$ .

Q5. À l'aide de la photographie, donner l'ordre de grandeur de la distance  $2a$  entre les deux fentes.

## Exercice n°6 Le piano (~ 45 min)

Le piano est un instrument de musique à cordes frappées inventé par l'italien Bartolomeo Cristofori au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle et perfectionné principalement au XIX<sup>e</sup> siècle, le piano à queue moderne ayant atteint sa maturité au début du XX<sup>e</sup> siècle.

Lorsque l'instrumentiste frappe une touche du clavier, celle-ci actionne un mécanisme, qui actionne à son tour un marteau<sup>a</sup>, qui vient frapper une corde<sup>b</sup>. Celle-ci entre alors en vibration libre (tant que la touche est enfoncée). On s'intéresse dans cette partie aux vibrations libres d'une corde du piano.



a. Les marteaux sont réalisés en bois recouvert de feutre.

b. Dans le médium et l'aigu, chaque marteau frappe simultanément deux ou trois cordes identiques pour chaque note.

La corde de masse linéique  $\mu$  est tendue avec la tension  $T_0$ . Au repos, la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal ( $Ox$ ). On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note  $y(x, t)$  le déplacement du point de la corde à l'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ . L'axe ( $Oy$ ) est l'axe vertical ascendant.

La célérité d'une onde sur la corde s'exprime  $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ .

Q1. On assimile la corde à un cylindre de longueur  $L$  et de diamètre  $d$ .

Exprimer la masse  $m$  de la corde en fonction de  $L$ ,  $d$  et la masse volumique de l'acier  $\rho$ .

En déduire l'expression de sa masse linéique définie par  $\mu = \frac{m}{L}$  en fonction de  $d$  et  $\rho$ .

Q2. Pour une corde en acier donnant la note « La 4 », le diamètre de la corde est de 1,1 mm et elle est tendue à une tension de  $T_0 = 830$  N. La masse volumique de l'acier vaut  $7,8 \times 10^3$  kg · m<sup>-3</sup>.

Calculer la célérité  $c$  des ondes transversales sur la corde.

L'onde existant sur la corde est la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de même amplitude et de même pulsation  $\omega$  se propageant en sens opposés.

Q3. Donner l'expression d'une onde progressive sinusoïdale,  $y_+(x, t)$  se propageant dans le sens des  $x$  croissants. On notera  $y_0$  son amplitude,  $\omega$  sa pulsation,  $k$  son vecteur d'onde, sans phase à l'origine des temps.

Q4. Donner l'expression d'une onde progressive sinusoïdale,  $y_-(x, t)$  se propageant dans le sens des  $x$  décroissants. On notera  $y_0$  son amplitude,  $\omega$  sa pulsation,  $k$  son vecteur d'onde et  $\varphi$  sa phase à l'origine des temps.

Q5. En déduire que l'onde résultante qui existe sur la corde s'écrit  $y(x, t) = 2y_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right)$ .

Comment appelle-t-on une telle onde ?

Qu'est-ce qui la distingue d'une onde progressive ? On attend une réponse à la fois qualitative et en terme d'expression mathématique.

La corde étant fixée à ses deux extrémités,  $x = 0$  et  $x = L$ , pour tout instant  $t$ ,  $y(0, t) = 0$  et  $y(L, t) = 0$ .

Q6. Utiliser les deux conditions aux limites précédentes pour établir les expressions des vecteurs d'onde propres  $k_n$  en fonction de  $L$  et d'un entier  $n$  dont on précisera l'ensemble d'appartenance.

Q7. En déduire les expressions des fréquences propres  $f_n$  de la corde en fonction de  $c$ ,  $L$  et de  $n$ .

Q8. Donner l'expression de la fréquence du son émis par la corde.

Les 88 notes d'un piano moderne s'échelonnent du « La 0 » ( $f_{La0} = 28$  Hz) au « Do 8 » ( $f_{Do8} = 4,2$  kHz).

Pour le Do4 de fréquence  $f_{Do4} = 262$  Hz, la longueur de la corde est de  $L = 65$  cm.

Q9. En supposant que toutes les cordes sont de même masse linéique et tendues avec la même tension (hypothèses très critiquables!), quelles sont les valeurs extrêmes des longueurs de corde prévues dans l'extrême grave et dans l'extrême aigu ? Commenter.