? Lundi 5 février 2024
Devoir Surveillé n°7 (2) — *Durée : 4 heures*

La calculatrice est AUTORISÉE.

Consignes à respecter

- **Lire la totalité de l'énoncé** et commencer par les exercices les plus abordables.
- Présentation de la copie :
  - Prendre une **nouvelle copie double pour chaque exercice**.
  - Tirer un **trait horizontal** à travers toute la copie **entre chaque question**.
  - Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
  - **Numéroter les pages** sous la forme x/nombre total de pages.
- Rédaction :
  - Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
  - **Justifier** toutes vos réponses.
  - Applications numériques : nombre de **chiffres significatifs adapté** et avec une **unité**.

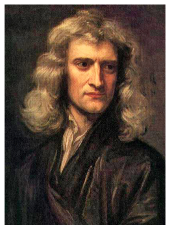
Ce sujet comporte 6 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 6 pages.

Données

- Formule de Fresnel :
$$I(M) = 2I_0\Big(1+\cos(\Delta\varphi(M))\Big)$$
- $$\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
- Lois de Coulomb du frottement, de coefficient de frottement f :
  — en présence de glissement : $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$;
  — en l'absence de glissement : $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < f\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$.

Exercice n°0 Un peu de culture !

Qui est-ce ? Qu'a-t-il fait ? De quel siècle est-il ?



Exercice n°1 Questions de cours sur l'énergie (MAX 15 min)

Q1. Définir le travail élémentaire de la force $\overrightarrow{F}$ s'exerçant sur M.

Q2. Définir le travail de la force $\overrightarrow{F}$ s'exerçant sur M se déplaçant entre A et B.

Q3. Définir la puissance de la force $\overrightarrow{F}$ s'exerçant sur M.

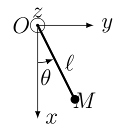
Q4. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

Q5. Qu'est-ce qu'une force conservative ?

Q6. Donner l'énergie potentielle élastique.

Exercice n°2 Pendule simple ($\sim$ 30 min)

On considère un pendule simple constitué d'un point M de masse m accroché à l'extrémité d'un fil inextensible, de longueur ℓ sans masse et sans rigidité. L'autre extrémité O est fixe dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire terrestre, considéré galiléen dans le cadre de l'étude.
On néglige les frottements dus à l'air.



Q1. Quel est le mouvement du point M ? Quel est le système de coordonnées adapté ?
Établir dans ce système de coordonnées, le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point M, en fonction de ℓ, θ et ses dérivées, et des vecteurs de la base adaptée.

Q2. Faire le bilan des forces et représenter les forces sur le schéma précédent.

Q3. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ en utilisant deux méthodes différentes :
(a) le principe fondamental de la dynamique,
(b) un théorème énergétique.

On se place, dans la suite, dans le cadre des mouvements de petite amplitude : $|\theta|$ reste très petit devant 1 rad.

Q4. Linéariser l'équation différentielle dans ce cas. Quel nom porte un système vérifiant une telle équation ?

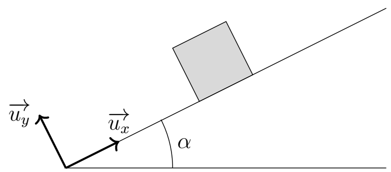
Q5. La résoudre avec les conditions initiales suivantes : $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Exercice n°3 Tapis roulant ($\sim$ 30 min)

On pose un carton sur un tapis roulant qui défile à la vitesse constante $\overrightarrow{v_T} = v_T\overrightarrow{u_x}$ dans le référentiel terrestre sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontal pour le monter à l'étage d'un entrepôt.

On étudie le mouvement dans le référentiel de l'entrepôt, auquel sont liées les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ de la base cartésienne.

On suppose que la vitesse du carton dans le référentiel terrestre est initialement nulle.



Q1. Dans cette première question, on suppose le tapis à l'arrêt.
À quelle condition sur le coefficient de frottement carton/tapis, le carton peut-il rester en équilibre si le tapis roulant est à l'arrêt ?
On se placera dans cette condition dans la suite.

Q2. Pourquoi y a-t-il glissement quand on pose le carton sur le tapis en fonctionnement ?
Déterminer le mouvement du carton tant qu'il y a glissement.
Déterminer l'instant où le glissement cesse.

Q3. Quel est le mouvement ultérieur du carton ?

Exercice n°4 Trajectoire d'un volant de Badminton ($\sim$ 1h30)

Toutes les questions sont liées entre elles, mais un grand nombre de résultats intermédiaires sont fournis, vous pouvez vous en servir !

Le badminton est un sport dans lequel les joueurs frappent un projectile, appelé volant, à l'aide d'une raquette. Le but de ce problème est de proposer une modélisation simplifiée de la trajectoire du volant sous l'effet conjugué de la pesanteur et de la résistance de l'air, et de confronter le modèle aux résultats d'une expérience. On négligera la poussée d'Archimède dans tout le problème.

On néglige dans un premier temps la force de freinage exercée par l'air.

Q1. On lance depuis le sol le volant de masse m avec une vitesse initiale U_0, dans une direction faisant un angle θ_0 avec le plan du sol, supposé horizontal.
Établir l'équation de la trajectoire. Quelle est la nature de la trajectoire ? Dessiner son allure.

Q2. Déterminer la portée L_0 (distance horizontale à laquelle le volant retombe sur le sol) en fonction de U_0, de θ_0, et de l'accélération de la pesanteur g.

Q3. Validez dimensionnellement l'expression de L_0 obtenue et vérifiez-la sur des cas limites simples que vous choisirez.

Q4. La vitesse initiale étant fixée, quel angle θ_0 permet d'envoyer le volant le plus loin possible ?

On tient maintenant compte du freinage de l'air, modélisé en assimilant le volant à une sphère solide en mouvement dans un fluide newtonien.

On écrit la force de freinage sous la forme $\overrightarrow{F} = -\frac{1}{2}\rho S C_x U \overrightarrow{U}$, avec $\overrightarrow{U}$ est le vecteur vitesse du volant et U sa norme, ρ la masse volumique de l'air, S la surface de référence du volant, et C_x le coefficient de traînée.

Q5. Déterminer la dimension de C_x.

Q6. Écrire l'équation du mouvement du volant vérifiée par le vecteur vitesse $\overrightarrow{U}$.
Montrer qu'elle admet une solution particulière, correspondant à un mouvement rectiligne uniforme dont on exprimera la norme du vecteur vitesse, notée U_∞, en fonction des paramètres du problème, puis le vecteur vitesse $\overrightarrow{U_\infty}$.

Q7. Réécrire l'équation du mouvement à l'aide de U_∞ en la mettant sous la forme $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{g} - \frac{g}{U_\infty^2} U \overrightarrow{U}$

Q8. À quelle condition sur U (comparée à U_∞) peut-on négliger le poids ?

On suppose dans la suite du problème que cette condition est initialement vérifiée.

Q9. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit alors : $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{U_\infty^2} U \overrightarrow{U}$

Dans ce cas, justifier que la trajectoire est rectiligne dans la direction de $\overrightarrow{U_0}$.
On note $\overrightarrow{u_X}$ la direction et le sens du mouvement durant cette phase.
Écrire alors l'équation différentielle vérifiée par la norme U, et la résoudre pour obtenir U en fonction du temps et montrer qu'elle s'écrit $U(t) = \frac{1}{\frac{1}{U_0} + \frac{gt}{U_\infty^2}}$, on pourra utiliser la méthode de la séparation des variables vue en cinétique chimique pour les réactions d'ordre 2.

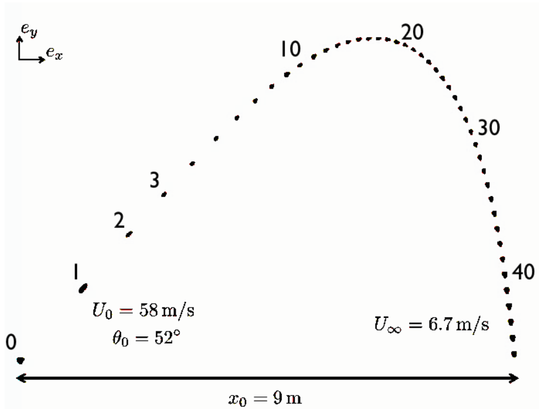


FIGURE 1 – Positions successives d'un volant de badminton allant de la gauche vers la droite, enregistrées toutes les 50 ms. Le premier point, repéré par le chiffre 0, correspond au lancer à $t = 0$.

Q10. En utilisant cette expression, déterminer et calculer le temps $t_{1/2}$ pour lequel la vitesse est égale à la moitié de la vitesse initiale.

Q11. Toujours dans le cadre de l'approximation de la question Q8, montrer que l'expression donnant la distance horizontale $x(t)$ parcourue au temps t s'écrit $x(t) = \frac{U_\infty^2 \cos(\theta_0)}{g} \ln\left(1 + \frac{U_0 g t}{U_\infty^2}\right)$

Q12. Établir x en fonction de U.

Q13. On suppose que l'approximation de la question Q8 cesse d'être valable lorsque la composante verticale de la force de freinage est égale au poids.
Quelle est l'expression de U à cet instant ?
En déduire la distance horizontale parcourue L.

On modélise la trajectoire du volant en distinguant trois régimes successifs :

— (1) le régime que l'on vient d'étudier, durant lequel l'accélération de la pesanteur est négligeable ;
— (2) un régime intermédiaire ;
— (3) un régime limite durant lequel l'accélération du volant est négligeable.

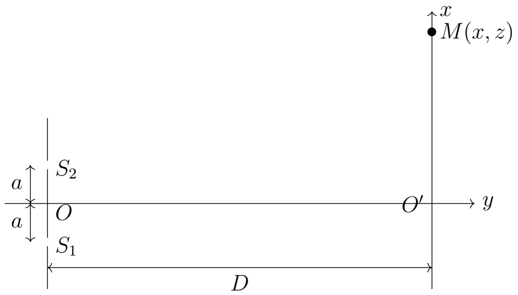
Q14. Localiser sur la chronophotographie le régime limite ainsi défini, en justifiant précisément votre réponse.

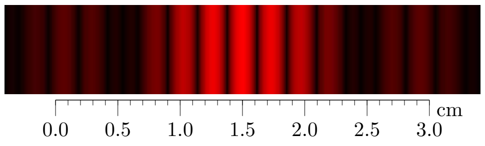
Q15. Une approximation de la trajectoire consiste à oublier la partie correspondant au régime intermédiaire. Dessiner la trajectoire obtenue dans cette approximation.

Q16. Donner l'expression littérale de la portée du tir dans cette approximation.
Comment se compare-t-elle à la portée en l'absence de freinage, déterminée à la question Q2 ?

Exercice n°5 Trous d'Young (∼ 30 min)

En 1802, l'expérience dite des « trous d'Young » a permis de confirmer la nature ondulatoire de la lumière en réalisant une figure d'interférence lumineuse.
Une version moderne de cette expérience consiste à éclaire avec une lumière laser de longueur d'onde λ deux fentes parallèles distantes de $2a$ et d'épaisseurs très inférieures à $2a$. Sur un écran situé à une distance $D \gg a$, on observe la lumière qui a traversé le système. On fait l'hypothèse que le problème est invariant selon la direction des fentes et on travaille dans le plan médiateur (Oxy) de ces dernières. On note S_1 et S_2 les points des fentes appartenant à ce plan et O le milieu de ces points. On suppose que les ondes sont en phase en S_1 et S_2.
L'axe Oy est perpendiculaire au plan contenant les fentes, l'axe $O'x$ se trouve sur l'écran, perpendiculaire à Oy.
Les notations sont schématisées ci-dessous.
Le point courant M est repéré par son ordonnée x.
La photographie ci-dessous reproduit ce qui est visualisé sur l'écran pour un laser de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm et une distance $D = 1,20$ m.





Q1. Exprimer la différence de marche en M en fonction de S_1M et S_2M.

Q2. Exprimer les distances S_1M et S_2M en fonction de x, z, a et D. Effectuer les approximations légitimes et nécessaires.
En déduire l'expression de la différence de marche en fonction de x, a et D.

Q3. Donner l'expression de l'intensité $I(x)$ en un point d'abscisse x sur l'écran, en fonction de l'intensité I_0 de l'onde lumineuse au niveau de chaque trou, de a, λ, D et x.

Q4. Après avoir rappelé sa définition, établir l'expression de l'interfrange i.

Q5. À l'aide de la photographie, donner l'ordre de grandeur de la distance $2a$ entre les deux fentes.

Exercice n°6 Le piano (∼ 45 min)

Le piano est un instrument de musique à cordes frappées inventé par l'italien Bartolomeo Cristofori au milieu du XVIIIe siècle et perfectionné principalement au XIXe siècle, le piano à queue moderne ayant atteint sa maturité au début du XXe siècle.
Lorsque l'instrumentiste frappe une touche du clavier, celle-ci actionne un mécanisme, qui actionne à son tour un marteau [a], qui vient frapper une corde [b]. Celle-ci entre alors en vibration libre (tant que la touche est enfoncée). On s'intéresse dans cette partie aux vibrations libres d'une corde du piano.

a. Les marteaux sont réalisés en bois recouvert de feutre.
b. Dans le médium et l'aigu, chaque marteau frappe simultanément deux ou trois cordes identiques pour chaque note.

La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0. Au repos, la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x,t)$ le déplacement du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t. L'axe (Oy) est l'axe vertical ascendant.

La célérité d'une onde sur la corde s'exprime $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$.

Q1. On assimile la corde à un cylindre de longueur L et de diamètre d.
Exprimer la masse m de la corde en fonction de L, d et la masse volumique de l'acier ρ.
En déduire l'expression de sa masse linéique définie par $\mu = \dfrac{m}{L}$ en fonction de d et ρ.

Q2. Pour une corde en acier donnant la note « La 4 », le diamètre de la corde est de 1,1 mm et elle est tendue à une tension de $T_0 = 830$ N. La masse volumique de l'acier vaut $7,8 \times 10^3$ kg · m^{-3}.
Calculer la célérité c des ondes transversales sur la corde.

L'onde existant sur la corde est la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de même amplitude et de même pulsation ω se propageant en sens opposés.

Q3. Donner l'expression d'une onde progressive sinusoïdale, $y_+(x,t)$ se propageant dans le sens des x croissants. On notera y_0 son amplitude, ω sa pulsation, k son vecteur d'onde, sans phase à l'origine des temps.

Q4. Donner l'expression d'une onde progressive sinusoïdale, $y_-(x,t)$ se propageant dans le sens des x décroissants. On notera y_0 son amplitude, ω sa pulsation, k son vecteur d'onde et φ sa phase à l'origine des temps.

Q5. En déduire que l'onde résultante qui existe sur la corde s'écrit $y(x,t) = 2y_0 \cos\left(\omega t + \dfrac{\varphi}{2}\right) \cos\left(kx + + \dfrac{\varphi}{2}\right)$.
Comment appelle-t-on une telle onde ?
Qu'est-ce qui la distingue d'une onde progressive ? On attend une réponse à la fois qualitative et en terme d'expression mathématique.

La corde étant fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, pour tout instant t, $y(0,t) = 0$ et $y(L,t) = 0$.

Q6. Utiliser les deux conditions aux limites précédentes pour établir les expressions des vecteurs d'onde propres k_n en fonction de L et d'un entier n dont on précisera l'ensemble d'appartenance.

Q7. En déduire les expressions des fréquences propres f_n de la corde en fonction de c, L et de n.

Q8. Donner l'expression de la fréquence du son émis par la corde.

Les 88 notes d'un piano moderne s'échelonnent du « La 0 » ($f_{\mathrm{La0}} = 28$ Hz) au « Do 8 » ($f_{\mathrm{Do8}} = 4{,}2$ kHz).
Pour le Do4 de fréquence $f_{\mathrm{Do4}} = 262$ Hz, la longueur de la corde est de $L = 65$ cm.

Q9. En supposant que toutes les cordes sont de même masse linéique et tendues avec la même tension (hypothèses très critiquables !), quelles sont les valeurs extrêmes des longueurs de corde prévues dans l'extrême grave et dans l'extrême aigu ? Commenter.