Thème II. Mouvements et interactions

Chapitre n°16 Théorème du moment cinétique pour le point matériel

Pré-requis

- PCSI : Thème Mouvement et interactions
  - Produit vectoriel

Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, nous allons introduire, **pour le point matériel**, une nouvelle grandeur cinétique : le moment cinétique, et une nouvelle grandeur caractérisant les actions mécaniques : le moment d'une force, et énoncer une nouvelle loi de la dynamique : le théorème du moment cinétique. Ce nouveau théorème viendra s'ajouter aux théorèmes déjà utilisés précédemment, mais n'apportera pas de nouvelles informations pour le point matériel. Cependant, ce théorème sera nécessaire pour étudier le mouvement du solide, que nous verrons dans le chapitre 18.

Plan du cours

Programme officiel

La partie 2.5. « Moment cinétique » est l'occasion d'introduire les notions de moment cinétique et de moment d'une force. L'un des objectifs visés est que les étudiants disposent de représentations concrètes qui permettent de donner du sens aux grandeurs vectorielles et scalaires utilisées ; c'est notamment pour cela que le bras de levier est introduit. Comme souligné précédemment, l'accent est mis sur l'identification des situations où le moment cinétique est conservé.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.5. Moment cinétique	
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.	Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement. Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté. Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.	Exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen. Conservation du moment cinétique.	Identifier les cas de conservation du moment cinétique

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – 🙂 – ☹ – Définir le moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point A.

2 – – – Définir le moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un axe orienté $\Delta = (A, \overrightarrow{u_\Delta})$.

3 – – – Définir le moment d'une force $\overrightarrow{f}$ qui s'exerce sur le point matériel M par rapport à un point A.

4 – – – Définir le moment d'une force $\overrightarrow{f}$ qui s'exerce sur le point matériel M par rapport à un axe orienté $\Delta = (A, \overrightarrow{u_\Delta})$.

5 – – – Définir le bras de levier d'une force.

6 – – – Exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté, en utilisant le bras de levier.

7 – – – Énoncer le théorème du moment cinétique en un point fixe, ou par rapport à un axe fixe, dans un référentiel galiléen.

8 – – – Dans quels cas, le moment cinétique se conserve ?

9 – – – Établir l'équation du mouvement du pendule simple en utilisant un théorème du moment cinétique.

I Moment cinétique

— Système étudié : point matériel M de masse m

— Référentiel d'étude : $\mathscr{R}$ lié au repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$

I.1 Moment cinétique par rapport à un point

<u>Capacité exigible :</u> **Définir le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point. Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement**

Définition : Moment cinétique par rapport à un point

Le <u>**moment cinétique du point matériel M par rapport au point A dans le référentiel $\mathscr{R}$**</u> est :

$$\overrightarrow{L_A(M/\mathscr{R})} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p(M/\mathscr{R})}$$

$$\overrightarrow{L_A(M/\mathscr{R})} = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$$

$\overrightarrow{L_A(M/\mathscr{R})}$ est un **VECTEUR**.

<u>**Unité :**</u> $\left\|\overrightarrow{L_A(M/\mathscr{R})}\right\|$ s'exprime en $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} = J \cdot s}$

REMARQUES

- Si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{L_A(M/\mathscr{R})} = \overrightarrow{0}$.
- Si $\overrightarrow{L_A(M/\mathscr{R})} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{L_A(M/\mathscr{R})}$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$.

Attention

Le moment cinétique dépend du point par rapport auquel on le calcule, il est donc **absolument indispensable de préciser par rapport à quel point vous le calculez.**

REMARQUES

Soient deux points A et B, relions $\overrightarrow{L_A(M/\mathscr{R})}$ et $\overrightarrow{L_B(M/\mathscr{R})}$

$\overrightarrow{L_A(M/\mathscr{R})} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p(M/\mathscr{R})} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) \wedge \overrightarrow{p(M/\mathscr{R})} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{p(M/\mathscr{R})} + \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{p(M/\mathscr{R})}$,

donc $\overrightarrow{L_A(M/\mathscr{R})} = \overrightarrow{L_B(M/\mathscr{R})} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{p(M/\mathscr{R})}$

Exercice de cours A Mouvement plan

On étudie le mouvement plan d'un point matériel $M(m)$ dans le plan perpendiculaire à l'axe (Oz), en utilisant les coordonnées cylindriques.

Q1. Calculer le moment cinétique de $M(m)$ par rapport à O.

Q2. Relier le sens du vecteur $\overrightarrow{L_O(M/\mathscr{R})}$ au signe de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$, puis au sens du mouvement.

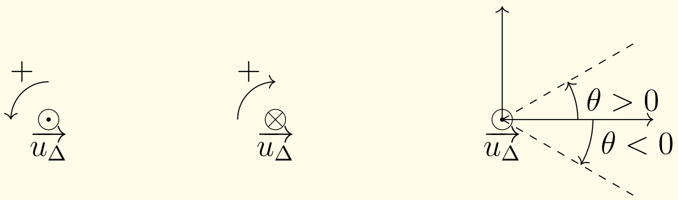
Méthode : Déterminer le sens positif de rotation à l'aide de la règle de la main droite

À l'aide de la main droite, on pointe le pouce dans le sens du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$ de l'axe de rotation orienté Δ. Les autres doigts, légèrement repliés, pointent alors dans le sens positif des rotations autour de cet axe de rotation Δ.

Méthode : Sens direct / indirect

Attention à l'orientation de l'axe $\Delta = (0; \overrightarrow{u_\Delta})$ et au sens positif de l'angle θ. Il faut **respecter la convention d'orientation** suivante.

Si on regarde l'axe par dessus, le sens trigonométrique est choisit comme étant le sens positif des angles. On parle, en mathématique, d'orientation directe de l'espace. C'est la règle de la main droite.



I.2 Moment cinétique par rapport à un axe orienté

<u>Capacité exigible :</u> **Définir le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté. Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.**

Définition : Moment cinétique par rapport à un axe

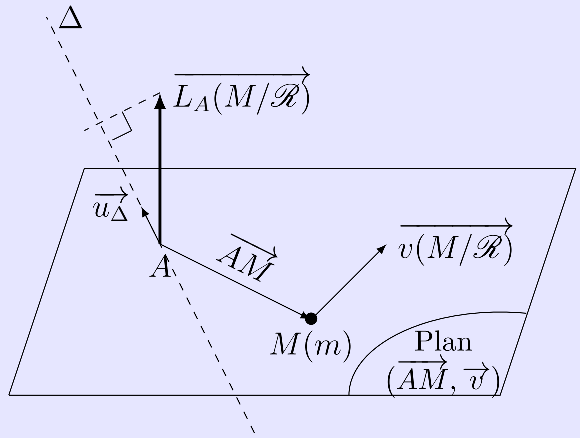
Soit un **axe orienté** Δ passant par le point A et dirigé par le vecteur directeur $\overrightarrow{u_\Delta}$, on note cet axe orienté $\Delta = (A; \overrightarrow{u_\Delta})$.

Le **<u>moment cinétique du point matériel M par rapport à l'axe ORIENTÉ $\Delta = (A; \overrightarrow{u_\Delta})$ dans le référentiel $\mathscr{R}$</u>** est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{L_A(M/\mathscr{R})}$ sur l'axe orienté Δ :

$$L_\Delta(M/\mathscr{R}) = \overrightarrow{L_A(M/\mathscr{R})} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

$$L_\Delta(M/\mathscr{R}) = \left(\overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

$L_\Delta(M/\mathscr{R})$ est un **SCALAIRE ALGÉBRIQUE** (positif ou négatif).



<u>Unité :</u> $L_\Delta(M/\mathscr{R})$ s'exprime en $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} = J \cdot s}$

Le moment L_Δ par rapport à un axe ne dépend pas du point de l'axe utilisé pour le calculer.

Attention : Moment cinétique scalaire

- Quand vous écrivez $L_\Delta(M/\mathscr{R}) = \left(\overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$, les parenthèses $\Big(\quad \Big)$ sont INDISPENSABLES : il faut d'abord calculer le produit vectoriel, PUIS calculer le produit scalaire.
- La précision « axe ORIENTÉ » est indispensable : il est absolument indispensable que le SENS de l'AXE Δ soit précisé et connu avant de définir/calculer le moment cinétique par rapport à Δ.

Attention – Ne pas confondre : $\vec{L_A}$ / L_Δ

- Le moment cinétique PAR RAPPORT À UN POINT est défini par un PRODUIT VECTORIEL, donc c'est un VECTEUR, qui a donc une direction, un sens et une norme.
- Le moment cinétique PAR RAPPORT À UN AXE est défini par un PRODUIT MIXTE, c'est-à-dire un produit vectoriel suivi par un produit scalaire, c'est donc un SCALAIRE (c'est-à-dire un nombre).

Exercice de cours B Mouvement plan

On étudie le mouvement plan d'un point matériel $M(m)$ dans le plan perpendiculaire à l'axe (Oz), en utilisant les coordonnées cylindriques.

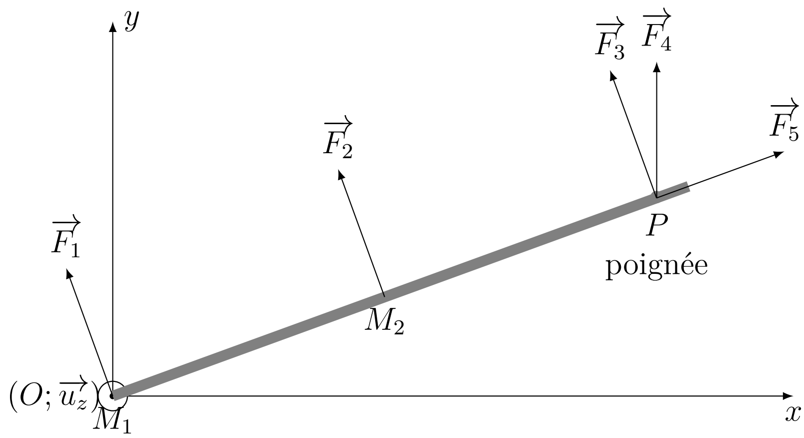
Q1. Calculer le moment cinétique de $M(m)$ par rapport à l'axe orienté $(Oz) = (O; \overrightarrow{u_z})$.

Q2. Relier le signe de $L_{Oz}(M/\mathscr{R})$ au signe de $\dot{\theta}$, puis au sens du mouvement.

II Moment d'une force

Pour comprendre l'importance de définir le moment d'une force, imaginons la situation suivante : « Une personne cherche à ouvrir une porte avec une force $\vec{F}$ de norme F donnée. En quel point et dans quelle direction doit-elle exercer cette force pour que son action soit la plus efficace ? »

Laquelle des 5 forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, $\vec{F_4}$, $\vec{F_5}$ est la plus efficace pour ouvrir la porte ? Pourtant elles sont toutes de même norme . . .



II.1 Moment d'une force par rapport à un point

Capacité exigible : Définir le moment d'une force par rapport à un point.

— Système étudié : point matériel M de masse m
— Référentiel d'étude : référentiel $\mathscr{R}$
— M soumis à une force $\vec{f}$ (autrement dit $\vec{f}$ s'exerce sur le point M)

Définition : Moment d'une force par rapport à un point

Le **moment de la force $\vec{f}$ qui s'exerce sur le point matériel M par rapport au point A** est :

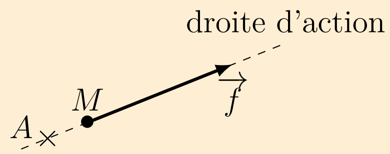
$$\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$$

$\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\vec{f}\right)$ est un VECTEUR.

Unité : $\left\|\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\vec{f}\right)\right\|$ s'exprime en $\mathrm{N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = J}$

REMARQUES

- $\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right) = \overrightarrow{0}$, si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{f}$ sont colinéaires.
  Le **moment d'une force par rapport à au point** A **est nul si le point** A **appartient à la droite d'action de** $\overrightarrow{f}$.



- Si $\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right)$ est perpendiculaire au plan défini par $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{f}$.
- $\left\|\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \times \left\|\overrightarrow{f}\right\| \times \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{f}}\right)\right|$

Exercice de cours C　Pendule simple
On étudie le, maintenant classique, pendule simple : un point matériel M est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ. On note O le point d'attache du fil.
Déterminer le moment de la tension du fil $\overrightarrow{T}$ et du poids par rapport à O.

II.2 Moment d'une force par rapport à un axe orienté

II.2.a) Définition

Capacité exigible : Définir le moment d'une force par rapport à un axe orienté.

Définition : Moment d'une force par rapport à un axe

Soit un **axe orienté** Δ passant par le point A et dirigé par le vecteur directeur $\overrightarrow{u_\Delta}$: $\Delta = (A; \overrightarrow{u_\Delta})$.
Le **moment de la force $\overrightarrow{f}$ qui s'exerce sur M par rapport à l'axe ORIENTÉ $\Delta = (A; \overrightarrow{u_\Delta})$** est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right)$ sur l'axe orienté $\Delta = (A; \overrightarrow{u_\Delta})$:

$$\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right) = \left(\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right)\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

$\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right)$ est un SCALAIRE ALGÉBRIQUE (positif ou négatif).

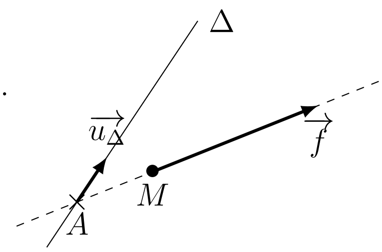
Le moment $\mathscr{M}_\Delta$ par rapport à un axe ne dépend pas du point de l'axe utilisé pour le calculer.

II.2.b) Calcul pratique de $\mathscr{M}_\Delta$

i- Droite d'action de $\overrightarrow{f}$ coupant l'axe Δ

La droite d'action de $\overrightarrow{f}$ coupe l'axe Δ en A.
Calculons $\mathscr{M}_\Delta$ en utilisant le point d'intersection de Δ et de la droite d'action.

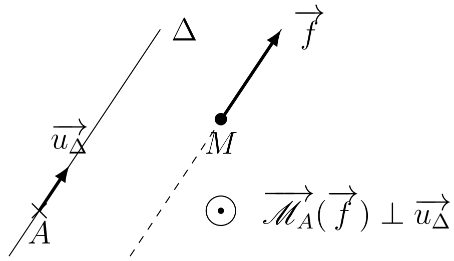
$$\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{\mathscr{M}_A}(\overrightarrow{f}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \big(\underbrace{\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f}}_{=\overrightarrow{0}}\big) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0$$



ii- Droite d'action de $\overrightarrow{f}$ parallèle à l'axe Δ

La droite d'action de $\overrightarrow{f}$ est parallèle à l'axe Δ :

$$\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f}) = \big(\underbrace{\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f}}_{\perp \overrightarrow{f} \text{ donc } \perp \overrightarrow{u_\Delta}}\big) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0$$



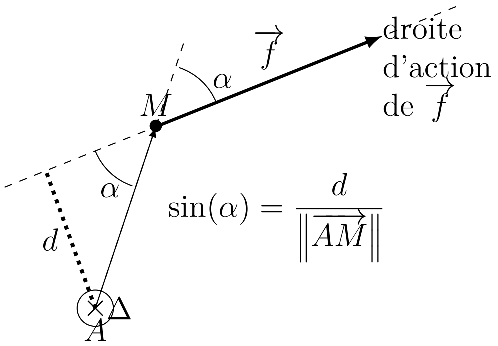
iii- Droite d'action de $\vec{f}$ perpendiculaire à l'axe Δ : Notion de bras de levier

Capacité exigible : Exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.

Le calcul du moment d'une force par rapport à un axe peut se faire plus simplement et plus rapidement qu'en calculant un produit vectoriel, puis un produit scalaire.

Définition : Bras de levier

Le **bras de levier** d'une force $\vec{f}$ appliquée en un point M est la distance entre la droite d'action de la force perpendiculaire à l'axe Δ et l'axe $\Delta = (A;\overrightarrow{u_\Delta})$ par rapport auquel on calcule le moment de la force.



À connaître

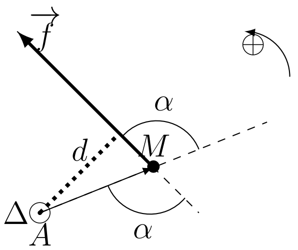
La valeur absolue du moment de la force $\vec{f}$ par rapport à l'axe Δ s'exprime, à l'aide du bras de levier d par :

$$\boxed{\left|\mathscr{M}_\Delta\right| = d \times \left\|\vec{f}\right\|}$$

En effet $\left|\mathscr{M}_\Delta\right| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \times \left\|\vec{f}\right\| \times \left|\sin(\alpha)\right|$
Or le **bras de levier** vaut $d = \left|\sin(\alpha)\right| \times \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$.

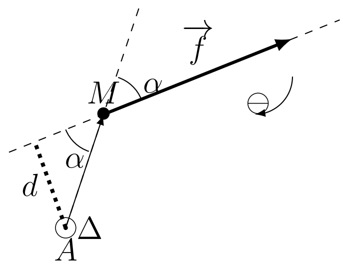
Pour connaître complètement $\mathscr{M}_\Delta$, il faut déterminer le signe de $\mathscr{M}_\Delta$, en utilisant la règle de la main droite : on place les doigts autres que le pouce selon $\vec{f}$ de la base jusqu'aux extrémités. Si le pouce est dans le même sens que Δ, alors la force fait tourner dans le sens direct par rapport à Δ.

Si $\vec{f}$ tend à faire tourner M autour de Δ dans le sens direct, alors $\mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) > 0$.



$$\mathscr{M}_\Delta = +d \times \left\|\vec{f}\right\|$$

Si $\vec{f}$ tend à faire tourner M autour de Δ dans le sens indirect, alors $\mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) < 0$.



$$\mathscr{M}_\Delta = -d \times \left\|\vec{f}\right\|$$

Méthode : Comment utiliser le bras de levier ?

1. Déterminer, à l'aide d'un schéma, la distance entre la droite d'action de la force et l'axe orienté Δ (= le bras de levier d).
2. Calculer la valeur absolue du moment $\left|\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}\right)\right| = \left\|\vec{f}\right\| \times d$, avec d le bras de levier (distance entre la droite d'action et l'axe Δ).
3. Déterminer le signe de $\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}\right)$:
   - si $\vec{f}$ **fait tourner dans le sens direct** par rapport à l'axe orienté Δ, $\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}\right) > 0$, donc $\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}\right) = +d \times \left\|\vec{f}\right\|$
   - si $\vec{f}$ **fait tourner dans le sens indirect** par rapport à l'axe orienté Δ, $\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}\right) < 0$, donc $\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}\right) = -d \times \left\|\vec{f}\right\|$

Exercice de cours D Comment ouvrir une porte efficacement ?
Déterminer les moments des forces $\overrightarrow{F_1}$ à $\overrightarrow{F_5}$ par rapport à l'axe de rotation (Oz) de la porte à l'aide du bras de levier. Commenter.

Exercice de cours E Pendule simple

Q1. Déterminer le moment de la tension du fil $\overrightarrow{T}$ par rapport à l'axe (Oz).

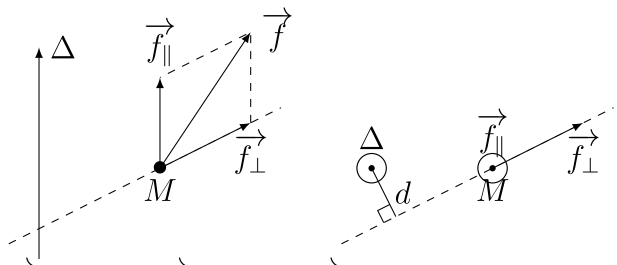
Q2. Déterminer le moment du poids par rapport à l'axe (Oz) en utilisant le bras de levier.

iv- Cas général (*pour info*)

Dans le cas général, on peut noter que le vecteur force $\overrightarrow{f}$ peut se décomposer :

— en une force parallèle à l'axe Δ, notée $\overrightarrow{f_\parallel}$, et

— en une force perpendiculaire à l'axe Δ, notée $\overrightarrow{f_\perp}$.



Soit : $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f_\parallel} + \overrightarrow{f_\perp}$

Le moment de $\overrightarrow{f}$ par rapport à l'axe Δ s'écrit alors $\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f}) = \mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f_\parallel}) + \mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f_\perp})$, avec :

— le moment d'une force parallèle à l'axe Δ nul, donc $\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f_\parallel}) = 0$;

— et le moment d'une force perpendiculaire à l'axe Δ qui se calcule très facilement à l'aide du bras de levier, donc $\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f_\perp}) = \pm d \times \left\|\overrightarrow{f_\perp}\right\|$, avec d le bras de levier, c'est-à-dire la distance entre la droite d'action de $\overrightarrow{f_\perp}$ et l'axe Δ.

Soit $\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f}) = \pm d \times \left\|\overrightarrow{f_\perp}\right\|$, avec « + » si $\overrightarrow{f_\perp}$ fait tourner M dans le sens direct (positif) par rapport à Δ et « − » si $\overrightarrow{f_\perp}$ fait tourner M dans le sens indirect (négatif) par rapport à Δ.

III Théorème du moment cinétique pour le point matériel

— Système étudié : point matériel M de masse m

— Référentiel d'étude : référentiel $\mathscr{R}$, considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.

— Bilan des actions mécaniques : forces $\overrightarrow{f_i}$ de résultante $\sum \overrightarrow{f_i}$

III.1 Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe en référentiel galiléen

Capacité exigible : **Connaître et utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à un point.**

À connaître : TMC pour un point matériel par rapport à un point

Soit O un **point fixe** du référentiel d'étude $\mathscr{R}$ galiléen.

Le **théorème du moment cinétique appliqué au point matériel $M(m)$ par rapport au point fixe O du référentiel $\mathscr{R}$ galiléen** dit que la dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à un point fixe du référentiel est égale à la somme des moments des forces par rapport au même point fixe :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O\left(M/\mathscr{R}\right)}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}} = \sum_i \overrightarrow{\mathscr{M}_O}\left(\overrightarrow{f_i}\right) = \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_i}$$

Exercice de cours F Pendule simple *(Suite)*
Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la variable d'espace pertinente du problème à l'aide du TMC par rapport au point d'attache O du fil (voir méthode page 8).

III.2 Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe en référentiel galiléen

Capacité exigible : Connaître et utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à un axe orienté.

À connaître : TMC pour un point matériel par rapport à un axe

Soit un **axe orienté** Δ **fixe** dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude passant par le point O (fixe) et dirigé par le vecteur directeur $\overrightarrow{u_\Delta}$ (fixe) : $\Delta = (O; \overrightarrow{u_\Delta})$.

Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe orienté fixe $\Delta = (O; \overrightarrow{u_\Delta})$ du référentiel $\mathscr{R}$ galiléen

$$\left(\frac{\mathrm{d}L_\Delta\left(M/\mathscr{R}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}} = \sum_i \mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f_i}\right) = \sum_i \left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_i}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Méthode : Application d'un théorème du moment cinétique pour un point matériel

① Définir le **système** étudié.

② Préciser le **référentiel d'étude**. *En 1ère année, il sera considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.*

③ Choisir le **système de coordonnées adapté** à la description du mouvement.
Faire un **schéma clair** et de taille suffisante sur lequel vous représentez le système et le système de coordonnées choisi.

④ Faire un **bilan de forces** précis et complet.
Représenter toutes les forces sur le schéma précédent.

Attention à ne pas oublier les forces de liaison (réaction du support notamment).

Un schéma complet est nécessaire et obligatoire pour faire un exercice de mécanique.

Par rapport à un point fixe :

⑤ **Choisir le point fixe du référentiel** par rapport auquel vous appliquez le théorème du moment cinétique.

⑥ Écrire le **théorème du moment cinétique par rapport au point fixe** du référentiel galiléen.
- Exprimer le moment cinétique par rapport au point fixe en calculant le produit vectoriel des vecteurs exprimés dans la base du système de coordonnées adapté choisi.
- Calculer la dérivée temporelle du moment cinétique calculé précédemment.
- Exprimer le moment des différentes forces par rapport au point fixe (**calculer chaque moment séparément**) en calculant le produit vectoriel des vecteurs exprimés dans la base du système de coordonnées adapté choisi.

Par rapport à un axe fixe :

⑤ **Choisir l'axe orienté fixe du référentiel** par rapport auquel vous appliquez le théorème du moment cinétique.

⑥ Écrire le **théorème du moment cinétique par rapport à l'axe fixe** du référentiel galiléen.
- Exprimer le moment cinétique par rapport à l'axe fixe en calculant le produit mixte des vecteurs exprimés dans la base du système de coordonnées adapté choisi.
- Calculer la dérivée temporelle du moment cinétique calculé précédemment.
- Exprimer le moment des différentes forces par rapport à l'axe fixe en utilisant le bras de levier (**calculer chaque moment séparément**).

⑦ En déduire l'équation du mouvement.

Exercice de cours G Pendule simple

Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la variable d'espace pertinente du problème à l'aide du TMC par rapport à un axe orienté bien choisi.

Exemple de cours à connaître : le pendule simple

Entraînez-vous à refaire la totalité des calculs afin d'établir l'équation du mouvement du pendule simple, en utilisant le TMC par rapport à un point ou un axe orienté bien choisi, fixe dans le référentiel d'étude.

III.3 Conservation du moment cinétique

Capacité exigible : Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

Le moment cinétique se conserve dans le référentiel $\mathscr{R}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{L_O(M/\mathscr{R})}$ est un vecteur constant ssi :

- $\overrightarrow{L_O(M/\mathscr{R})} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})$ sont colinéaires à chaque instant : c'est le cas d'un mouvement rectiligne

OU

- $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O(M/\mathscr{R})}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_i} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \overrightarrow{f_i} = \overrightarrow{0}$: ssi les forces qui ne se compensent pas sont de moments nuls à chaque instant.

À connaître : Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un point matériel par rapport au point O se conserve si et seulement si :

— le **système est pseudo-isolé**, les forces qui s'exercent sur le point matériel $M(m)$ se compensent, et le moment résultant est nul ;

— OU les forces qui s'exercent sur le point matériel sont de moments par rapport à O nuls, c'est-à-dire si la droite d'action de la résultante des forces passe à chaque instant par le point O : on parle de **forces centrales** ;

IV Lois de la dynamique du point matériel

Grandeurs cinétiques	Quantité de mouvement $\overrightarrow{p}(M/\mathscr{R}) = m\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})$	Énergie cinétique $\mathscr{E}_c(M/\mathscr{R}) = \dfrac{1}{2}m\Vert\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})\Vert^2$	Moment cinétique par rapport à O $\overrightarrow{L_O(M/\mathscr{R})} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})$
Actions méca-niques	Forces $\overrightarrow{F}$	Puissance d'un force $\mathscr{P}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})$	Moment d'une force par rapport à O $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$
Lois	PFD : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}(M/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F}^{\text{ext}}$ 1 loi vectorielle $\Rightarrow$ 3 lois scalaires	TPC : $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\overrightarrow{F}^{\text{ext}})$ 1 loi scalaire	TMC par rapport à O : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O(M/\mathscr{R})}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}} = \sum \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F}^{\text{ext}})$ 1 loi vectorielle $\Rightarrow$ 3 lois scalaires
Quand ?	Mouvements à 2 ou 3 degrés de liberté Détermination de forces qui ne travaillent pas.	Mouvements à 1 degré de liberté	Mouvements de rotation