

? À rendre le mercredi 6 mars 2024
Devoir Maison n°14

💡 Comment chercher un D.M. ?

- Commencer à chercher le DM, dès le soir de la distribution de l'énoncé,
- Avec le chapitre et les exercices ouverts sous les yeux.
- Chercher en groupe.
- En cas de blocage, **poser des questions**, à la fin d'un cours ou par mail : fabienbruno.pcsi@gmail.com
- La réponse à un problème de physique doit contenir :
 - des **schémas** grands, clairs et complets ;
 - des **phrases** qui expliquent votre raisonnement ;
 - les calculs **littéraux**, avec uniquement les **grandeurs littérales** définies par l'énoncé (ou par vous-même si elles ne le sont pas par l'énoncé) ;
 - les applications numériques avec un nombre adapté de chiffres significatifs et une **unité**.

Après avoir récupéré votre copie et le corrigé :

- Reprendre votre copie avec le corrigé afin de comprendre vos erreurs, lire les conseils donnés, ...
- Refaire le DM (si besoin) avant le DS suivant.

Exercice 1 Un accélérateur de particule

Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider ; LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de **27 kilomètres de circonférence** et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.

Dans les accélérateurs de particules, des protons (ou des ions) de très haute énergie circulant dans deux faisceaux tournant à contre-sens se choquent les uns contre les autres, dans le but de rechercher des indices de la supersymétrie, de la matière noire et de l'origine de la masse des particules élémentaires. Les faisceaux se composent de paquets contenant des centaines de milliards de protons chacun.

Voyageant quasiment à la vitesse de la lumière, ils sont injectés, accélérés, et maintenus en circulation pendant des heures, guidés par des milliers d'aimants supraconducteurs puissants.

L'énergie cinétique des protons (**7 TeV**) est transformée au moment du choc en une myriade de particules exotiques, que les détecteurs observent avec attention. Le 04 juillet 2012, les chercheurs ont annoncé l'observation du boson de Higgs dont l'existence était prédite par le modèle standard.

Les aimants utilisés, de 15 m de long et d'environ 35 tonnes, produisent en leur cœur un **champ magnétique environ 200 000 fois plus grand que le champ magnétique terrestre**. Le LHC en nécessite 1232.

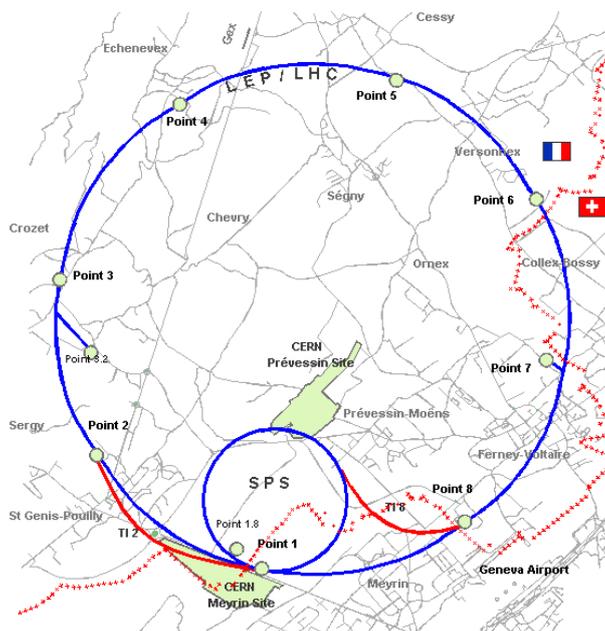


FIGURE 1 – Site du CERN, dans les environs de Genève. Le grand cercle représente la position du tunnel du LHC.

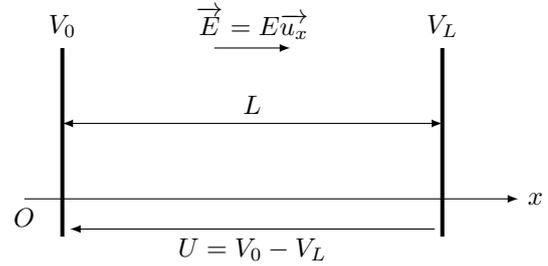
Aide aux calculs

$\frac{1,6}{1,67} \approx 1$	$\frac{7}{9} \approx 0,8$	$\frac{24}{27} \approx 0,9$
$\sqrt{10^5 + 9 \cdot 10^6} \approx 3,0 \cdot 10^3$	Si $x \ll 1$, alors $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$	$0,9\pi \approx 2,8$

Dans cet exercice, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider. Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite. Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

Particule dans un champ électrique constant et uniforme

- Q1. Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} ?
 Q2. Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ $E = 100 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.



- Q3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer l'accélération que subit un proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} .
 Que peut-on dire du vecteur accélération ?

FIGURE 2 – Schéma du dispositif d'accélération des protons

- Q4. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle d'une particule chargée de charge q en fonction du potentiel électrostatique V .

On admet qu'en considérant que le potentiel V_0 du plan $x = 0$ est nul, le potentiel du plan $x = L$ s'écrit $V_L = -EL$.

- Q5. En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique du proton sortant de la zone d'accélération, en fonction de la tension U .

Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN. Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale U_c toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-acceleratrice U_0 .

Source de protons
pré-accelérés par une
tension U_0

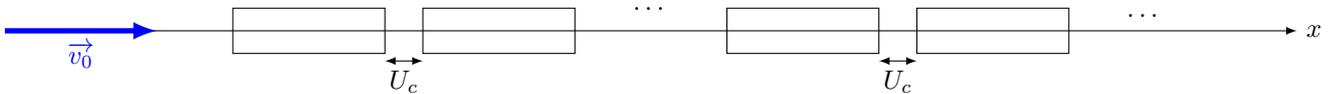


FIGURE 3 – Le linac 2

- Q6. Exprimer l'énergie cinétique du proton, puis sa vitesse v_0 en O , en fonction de U_0 , e et m_p .
 Q7. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?
 Q8. Exprimer l'énergie cinétique du proton à la sortie du n -ième tube en fonction de U_c et U_0 .
 Q9. Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10^e tube pour $U_0 = 200 \text{ kV}$, $U_c = 2000 \text{ kV}$.
 Q10. Sachant qu'une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, ces protons sont-ils relativistes ?

Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS).

Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.

On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

À $t = 0$ sa vitesse \vec{v}_0 est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 4.

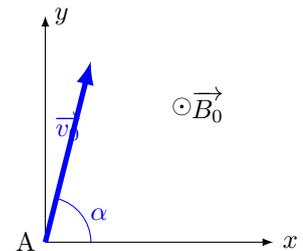


FIGURE 4 – Vitesse du proton dans le champ magnétique

- Q11. Donner l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique \vec{B}_0 .
 Q12. Reproduire la figure 4 sur votre copie afin de représenter la force magnétique subie par le proton en A .
 Exprimer la norme de cette force.
 Q13. En proposant des valeurs pour B_0 et v_0 , calculer un ordre de grandeur de la force précédente et conclure à l'action du poids sur le mouvement du proton.

Q14. Montrer que le travail associé à cette force est nul à chaque instant. En déduire une caractéristique du mouvement du proton.

Le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique. On admet que la trajectoire du proton est plan, dans le plan perpendiculaire à \vec{B}_0 .

Q15. Définir la base de Frenet et exprimer, dans le cas général, le vecteur vitesse et le vecteur accélération. Faire un schéma pour une trajectoire plane quelconque, en représentant la base et les deux vecteurs cinématiques.

Q16. Utiliser le principe fondamental de la dynamique pour justifier que le mouvement est circulaire et en établir le rayon de la trajectoire en fonction de m_p , B_0 , e et v_0 ; puis en fonction de B_0 , e et de la norme de la quantité de mouvement p du proton.

Q17. Quelle est la nature du mouvement du proton après sa sortie de la zone de champ magnétique ?

Exercice 2 Une remarque de cours à vérifier

En cours, monsieur BRUNO a affirmé que l'énergie des protons accélérés dans le LHC était comparable à l'énergie d'un TGV.

Q1. Vérifier cette comparaison en déterminant la vitesse d'une rame de TGV ayant une énergie cinétique égale à l'ensemble des protons contenus dans le LHC, une fois la puissance nominale atteinte.

DOCUMENT : Quelques chiffres essentiels : l'énergie du LHC pour la deuxième période d'exploitation :

Circonférence	26659 m
Énergie nominale d'un proton	6,5 TeV
Nombre de paquets par faisceau de protons	2808
Nombre de protons par paquet (au départ)	$1,2 \cdot 10^{11}$

Exercice 3 Molécule NH_3

Dans un modèle simplifié de la molécule d'ammoniac NH_3 , les trois atomes d'hydrogène H forment la base d'une pyramide dont l'azote N de masse m occupe le sommet. Les trois atomes d'hydrogène sont fixes dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen \mathcal{R}_g , associé au repère cartésien $\mathcal{R}_g(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Les trois atomes d'hydrogène définissent le plan (Oxy) . L'atome d'azote est en mouvement suivant l'axe $(O; \vec{u}_z)$ perpendiculaire au plan des atomes d'hydrogène. Il peut passer de part et d'autre de ce plan et sa cote est notée z .

Le champ de pesanteur est négligeable pour décrire cette structure atomique et la résultante des forces électromagnétiques qui s'exercent sur l'atome d'azote N supposé ponctuel est : $\vec{F} = -\beta z(z^2 - \alpha^2)\vec{u}_z$. Les constantes α et β sont positives.

Q1. Montrer que la force définie précédemment est une force conservative, et établir l'énergie potentielle \mathcal{E}_p dont la force \vec{F} dérive, à une constante additive près. On utilisera la méthode du cours mise en œuvre pour le poids, la force de rappel élastique, ... Puis, on prendra l'origine de l'énergie potentielle en $z = 0$, c'est-à-dire la constante apparaissant lors de la détermination de l'énergie potentielle est déterminée de sorte que $\mathcal{E}_p(z = 0) = 0$.

On pourra utiliser l'énergie potentielle écrite sous la forme : $\mathcal{E}_p(z) = \frac{\beta}{4}(z^2 - \alpha^2)^2 - \frac{\beta}{4}\alpha^4$ ou $\mathcal{E}_p(z) = \frac{\beta}{4}z^2(z^2 - 2\alpha^2)$

Q2. Représenter graphiquement \mathcal{E}_p lorsque z varie de $-\infty$ à $+\infty$. On fera une représentation graphique propre après avoir étudié rapidement (c'est une fonction polynômiale !) ses variations et ses extrema.

Q3. Définir ce que sont des position d'équilibre, position d'équilibre stable et position d'équilibre instable.

Puis, les caractériser en terme d'énergie potentielle.

À partir du graphe précédent, déterminer les positions d'équilibres stables et instables de l'atome d'azote.

Q4. On suppose que l'atome d'azote est situé dans une position d'équilibre stable.

Une énergie $\Delta\mathcal{E} < \frac{1}{4}\beta\alpha^4$ est fournie à l'atome d'azote, justifier graphiquement que l'atome d'azote va osciller entre deux valeurs limites z_1 et z_2 .

Q5. Exprimer l'énergie potentielle, au deuxième ordre, au voisinage de la position d'équilibre stable ($z = \alpha$), en utilisant le développement de Taylor-Young. On montrera que : $\mathcal{E}_p(z) \approx \beta\alpha^2(z - \alpha)^2 - \frac{\beta\alpha^4}{4}$

Q6. Que peut-on dire de l'énergie mécanique du système ?

Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par z au voisinage d'une position d'équilibre stable.

Quelle est la nature de cette équation différentielle ? Exprimer la fréquence des petites oscillations en fonction de m , α et β .

Q7. Que se passe-t-il si l'énergie cédée est supérieure à $\frac{1}{4}\beta\alpha^4$?