Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

TD n°17 Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

Données pour l'ensemble du TD :

- Constante universelle de gravitation : $G = 6,67.10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F · m^{-1}
- Constante de Planck : $h = 6,63.10^{-34}$ J · s
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00.10^8$ m · s^{-1}
- Masse de la Terre : $M_T = 5,97.10^{24}$ kg
- Rayon de la Terre : $R_T = 6,38.10^3$ km
- Masse du Soleil : $M_S = 1,99.10^{30}$ kg
- Masse de l'électron : $m_e = 9,11.10^{-31}$ kg
- Masse du proton : $m_p = 1,67.10^{-27}$ kg
- Charge élémentaire : $e = 1,602.10^{-19}$ C

I Exercices d'applications directes du cours

Exercice n°1 Orbite de transfert

Capacités exigibles :

✓ *Exploiter sans démonstration la 3ème loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire elliptique.*

✓ *Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.*

✓ *Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.*

Un satellite artificiel, assimilé à un point matériel M de masse $m = 900$ kg, se trouve sur une orbite circulaire provisoire de rayon $r_1 = 7500$ km autour de la Terre. On souhaite le faire passer sur son orbite définitive de rayon $r_2 = 42200$ km (orbite géostationnaire).
Pour cela, on le fait d'abord passer sur une orbite de transfert elliptique dont le périgée P est à la distance r_1 et l'apogée A à la distance r_2 du centre de la Terre. Lorsque le satellite arrive à cet apogée, on le fait alors passer sur l'orbite circulaire de rayon r_2.
Ces deux changements d'orbites sont obtenus par allumage d'un moteur placé sur le satellite : ce processus est très bref (par rapport à la période orbitale), donc on considèrera que la vitesse passe instantanément de v_1 à v_{e1} en P, puis de v_{e2} à v_2 en A (sans changer de direction dans chaque cas).

Q1. Faire un schéma représentant les deux orbites circulaires et l'ellipse de transfert entre P et A.

Q2. Exprimer et calculer la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite circulaire basse.

Q3. Démontrer que sur l'orbite de transfert elliptique, le produit $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante (en notant r et θ les coordonnées polaires du satellite).

Q4. *(Si vous n'êtes pas à l'aise)* Donner l'expression de l'énergie mécanique du satellite en orbite elliptique de demi-grand axe a.
(Pour les plus à l'aise) Établir l'expression de l'énergie mécanique du satellite en orbite elliptique de demi-grand axe a.

Q5. En déduire l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur chacune de ses trois orbites.

Q6. Exprimer la vitesse $v_e(r)$ du satellite sur la trajectoire elliptique en fonction de r et des constantes G, m, M_T, a.

Q7. Exprimer et calculer la vitesse v_{e1} après le premier transfert (au périgée donc) et la variation $\Delta v_1 = v_{e1} - v_1$.

Q8. Exprimer et calculer également le travail W_P fourni par le moteur au satellite en ce point.

Q9. Déterminer une relation entre v_{e1}, v_{e2}, r_1 et r_2.
Calculer v_{e2}.

Q10. Calculer la variation de vitesse $\Delta v_A = v_2 - v_{e2}$ lors du second transfert.
Déterminer le second travail W_A fourni par le moteur au satellite.

Q11. Exprimer et calculer la durée du transfert (entre P et A).

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°2 Lancement d'un satellite

Capacités exigibles :

✓ *Mouvement circulaire : montrer que le mouvement est uniforme et savoir calculer sa période.*

✓ *Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.*

Le satellite EUTELSAT 8 West B d'une masse $m = 5,8$ tonnes a été lancé de Kourou en Guyane française par une fusée Ariane 5 le 21 août 2015 afin d'être placé sur une orbite géostationnaire.
La base de lancement de Kourou se situe à une latitude $\lambda = 5,2°$.
Dans le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_g$ supposé galiléen, la Terre peut-être assimilée à un solide en rotation autour d'un axe fixe (l'axe Nord-Sud) à une vitesse angulaire Ω.

Q1. Décrire l'axe de rotation. Peut-on le considérer comme fixe ? Déterminer l'expression puis la valeur de Ω.

Q2. En déduire l'expression de la vitesse du point P dans le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_g$ en fonction de Ω, du rayon de la Terre R_T et de la latitude λ.

Q3. Exprimer alors l'énergie mécanique initiale $\mathscr{E}_{m0}$ du satellite posé au sol au point P.

Q4. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tir : Baïkonour au Kazakhstan ($\lambda = 46°$), Cap Canaveral aux USA ($\lambda = 28,5°$) et Kourou en Guyane Française ($\lambda = 5,1°$), lequel est le plus adapté ?

Q5. Calculer l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse (altitude $z \ll R_T$) depuis Kourou.

Q6. Sachant que 1 kW · h d'électricité coûte environ 0,15 €, estimer le coût théorique de la satellisation d'un kilogramme de charge utile. Ce coût est en réalité de l'ordre de 1000 €/kg. Commenter.

Q7. Calculer numériquement l'énergie gagnée entre Baïkonour et Kourou. Commenter.

Exercice n°3 Distance minimale d'approche d'un astéroïde

Capacités exigibles :

✓ *Déduire de la loi du moment cinétique la conservation du moment cinétique.*

✓ *Connaître les conséquences de la conservation du moment cinétique.*

✓ *Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.*

✓ *Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique.*

Un astéroïde de masse $m = 1,0.10^{18}$ kg s'approche dangereusement de la Terre. Il possède une vitesse $v_0 = 10$ km · s^{-1} dans le référentiel géocentrique $(\mathscr{R}_g)$ supposé galiléen avec un paramètre d'impact $b = 8,0.10^3$ km. À cet instant, l'attraction terrestre peut encore être négligée. Nous assimilerons l'astéroïde à un point matériel M pour étudier son mouvement.

Q1. Montrer que l'énergie mécanique $\mathscr{E}_m$ de la météorite est une constante et déterminer sa valeur initiale

Q2. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de la météorite par rapport à O est une constante et déterminer sa valeur initiale. Rappeler les deux conséquences de la conservation du moment cinétique.

Q3. Définir des coordonnées polaires adaptées et établir l'expression du moment cinétique à chaque instant.

Q4. Établir l'expression de l'énergie potentielle effective en fonction des constantes du problème et de la distance r.

Q5. Tracer l'allure de la courbe d'énergie potentielle effective et en déduire la nature de la trajectoire de la météorite (compte tenu de la valeur de l'énergie mécanique).

Q6. En utilisant la conservation des deux grandeurs précédentes, déterminer la distance minimale d'approche de l'astéroïde par rapport au centre de la Terre. S'écrase-t-il sur Terre ?

Exercice n°4 Modèles de Rutherford et de Bohr

Capacités exigibles :

✓ *Connaître les conséquences de la conservation du moment cinétique.*

✓ *Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.*

✓ *Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.*

On considère l'interaction électrostatique entre l'électron et le proton d'un atome d'hydrogène.
En 1911, l'expérience de Rutherford montre qu'il existe un noyau quasi ponctuel chargé positivement au sein de l'atome. Le modèle précédent de l'atome dû à Thomson (électrons localisés dans une sphère chargée uniformément positivement en volume) est alors invalidé. Rutherford propose un modèle planétaire dans lequel les électrons décrivent des trajectoires circulaires autour d'un noyau ponctuel fixe.

Q1. Déterminer l'énergie mécanique d'un électron sur une trajectoire de rayon a en fonction des paramètres du problème.

Q2. Déterminer son moment cinétique.

Pour expliquer les raies discrètes du rayonnement émis par une lampe à décharge, observées par Balmer en 1885, Bohr propose en 1913 un modèle dans lequel il impose au moment cinétique d'être quantifié, c'est-à-dire de ne prendre que les valeurs $L_n = n\hbar$, où n est un entier et $\hbar$ la constante de Planck réduite, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$.

Q3. Montrer que le rayon et l'énergie mécanique sont aussi quantifiés : $a = n^2 a_0$ et $\mathscr{E}_n = -\dfrac{\mathscr{E}_0}{n^2}$ où a_0 (rayon de Bohr) et $\mathscr{E}_0$ s'expriment en fonction de constantes fondamentales.

Q4. Pourquoi peut-on faire l'hypothèse que l'émission d'un photon d'énergie $h\nu$ est due à la transition de l'électron d'une orbite d'énergie $\mathscr{E}_p$ à une orbite d'énergie $\mathscr{E}_n$ telles que $h\nu = \mathscr{E}_p - \mathscr{E}_n$.

Q5. Vérifier la loi observée par Balmer donnant la longueur d'onde λ des raies de l'hydrogène : $\dfrac{1}{\lambda} = R_H\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{p^2}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^* > n$.
R_H est la constante de Rydberg, dont on donnera l'expression en fonction de constantes fondamentales.

Q6. Déterminer la quantité de mouvement et le rayon de l'électron sur l'orbite correspondant à $n = 1$. Ce modèle semi-classique est-il satisfaisant pour la mécanique quantique ?

Exercice n°5 Satellite Hipparcos

(Nettement plus difficile, et différent du cours)

Le satellite Hipparcos lancé le 8 août 1987 était constitué principalement d'un télescope de 30 cm de diamètre. Celui-ci a permis d'établir un catalogue des positions, distances et éclats de plus de 118 000 étoiles avec une précision jamais atteinte.
Ce satellite devait être placé sur une orbite géostationnaire à une altitude $H = 36\,000$ km. Un problème de mise à feu du moteur d'apogée a laissé Hipparcos sur son orbite de transfert, son altitude variant entre h et H. Après utilisation des moteurs de positionnement, l'altitude minimale a été portée à $h = 500$ km. Une programmation du satellite a permis de s'affranchir des problèmes liés à cette orbite.
Au cours d'une révolution, il passe dans la ceinture de Van Hallen. On supposera que cette ceinture est comprise entre deux sphères de rayon $r_1 = 8\,400$ km et $r_2 = 28\,000$ km et de centre celui de la Terre. La ceinture de Van Hallen est constituée de particules chargées piégées dans le champ magnétique terrestre. Ces particules aveuglent les détecteurs d'Hipparcos interrompant les mesures des positions des étoiles. Il est cependant utilisable à 65 %.
On assimile la Terre à une sphère de centre O, de rayon $R = 6\,400$ km et de masse M et le satellite à un point matériel (S, m). On suppose le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_g$ galiléen. La période de rotation de la Terre dans ce référentiel appelée jour sidéral vaut $T = 86\,164$ s. On note G la constante de gravitation, sa valeur numérique n'est pas utile dans ce problème.

Moment cinétique

Q1. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ du satellite est une constante du mouvement.

Q2. On utilise les coordonnées cylindriques $(O; \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{L_O} = L\overrightarrow{u_z}$.
Montrer que le mouvement est plan et exprimer $r^2\dot{\theta}$ en fonction de L et m. Quelle est le nom de cette grandeur ?

Vecteur excentricité

Q3. Montrer que $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{u_\theta} - \dfrac{L}{GmM}\overrightarrow{v}$ est une constante du mouvement ($\overrightarrow{v}$ étant la vitesse du satellite).

Q4. On choisit l'origine de l'angle polaire pour avoir $\theta = (\overrightarrow{e}, \overrightarrow{u_\theta})$

Montrer que l'équation de la trajectoire peut se mettre sous la forme : $r(\theta) = \dfrac{p}{1 - e\cos(\theta)}$, où e est la norme de $\overrightarrow{e}$.

On admettra qu'il s'agit de l'équation d'une ellipse.

Trajectoire d'Hipparcos

Q5. Exprimer et calculer e et p en fonction de h, H et R.

Q6. Exprimer et calculer le demi-grand axe a de la trajectoire.

Période d'Hipparcos

Q7. Énoncer sans démonstration la troisième loi de Kepler.

Q8. Exprimer la période T_h de révolution d'Hipparcos en fonction de T, R, H et h. Calculer T_h en heure.

Ceinture de Van Hallen

Q9. Déterminer les valeurs numériques des angles θ_1, θ_2 d'entrée et de sortie de la ceinture de Van Hallen du satellite. On donnera les valeurs comprises entre 0° et 180°.

Q10. Représenter sur un schéma clair la trajectoire du satellite et l'aire $\mathscr{A}$ balayée par $\overrightarrow{OS}$ lors d'un passage dans la ceinture de Van Hallen.

Pour la question suivante, on prendra une valeur approchée de $\mathscr{A} = 200.10^6$ km^2.

Q11. Déterminer le rapport $\rho = \dfrac{t_0}{T_h}$ en fonction de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}_e$ (aire de l'ellipse) où t_0 est la durée totale d'inactivité d'Hipparcos sur une période. Commenter.

La surface d'une ellipse est donnée par : $\mathscr{A}_e = \dfrac{\pi p^2}{(1-e^2)^{3/2}} = 1,31.10^9$ km^2

III Résolution de problème

Exercice n°6 Descente d'un satellite

Un satellite est en orbite circulaire autour de la Terre à 800 km d'altitude. Sur cet orbite, on constate que son altitude diminue de 1 m durant une période. On décrit les frottements avec l'atmosphère par une force de frottement fluide quadratique $\overrightarrow{f} = -\alpha m v \overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}$ désigne la vitesse du satellite et m sa masse. Le coefficient α est supposé indépendant de l'altitude du satellite : $\alpha = 1,5.10^{-15}$ m^{-1}.
Au bout de combien de temps l'altitude aura-t-elle baissé de 10 km ?