

? Lundi 14 mars 2022

Devoir Surveillé n°8 – Durée : 4 heures

La calculatrice est autorisée.

**Chapitres concernés :**

- Chapitre n°14. Approche énergétique du mouvement du point matériel.
- Chapitre n°15. Mouvement de particules chargées dans un champ électrique ou magnétique.
- Chapitre n°16. Théorème du moment cinétique appliqué au point matériel
- Chapitre n°17. Mouvement dans un champ à force centrale.

**⚠ Consignes à respecter**

- Lire la totalité de l'énoncé et commencer par les exercices les plus abordables.
- Présentation de la copie :
  - Prendre une **nouvelle copie double pour chaque exercice**.
  - Tirer un **trait horizontal** à travers toute la copie **entre chaque question**.
  - Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
  - Numérotter les pages sous la forme x/nombre total de pages.
- Rédaction :
  - Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
  - **Justifier** toutes vos réponses.
  - Applications numériques : nombre de **chiffres significatifs adapté** et avec une **unité**.

Ce sujet comporte 4 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les copies de concours sont numérisées en couleur, pour cela, vous devez respecter les consignes suivantes :

- Composer à l'encre BLEUE ou NOIRE NON EFFAÇABLE. Pas de stylo plume ni de stylos « friction ».
- Si vous souhaitez réaliser des schémas ou mettre des résultats en évidence, vous pouvez utiliser des couleurs, SAUF LE VERT ET LE TURQUOISE. Vous pouvez également utiliser des feutres ou des surligneurs.
- Ne pas utiliser de correcteur (tipex par exemple).

**Données**

- Charge élémentaire :  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Unités d'énergie :  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
- Constante d'Avogadro :  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante de la gravitation universelle :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- Lois de Coulomb sur le frottement :
  - En l'absence de glissement :  $\|\vec{R}_T\| < f_s \|\vec{R}_N\|$ , avec  $f_s$  le coefficient de frottement statique
  - En présence de glissement :  $\|\vec{R}_T\| = f_d \|\vec{R}_N\|$ , avec  $f_d$  le coefficient de frottement dynamique
- Champ de pesanteur terrestre :  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

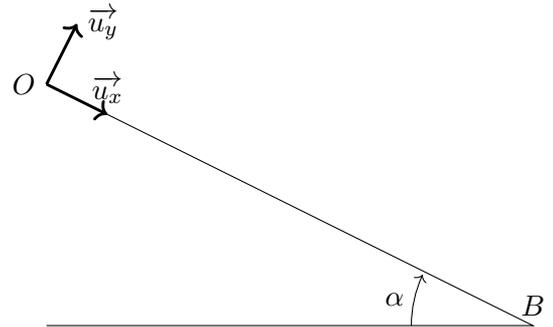
**Exercice 1** Half-pipe (Durée : 1 heure )

Un snow-boarder descend une piste de ski rectiligne avant d'arriver sur un half-pipe, qui est une structure neigeuse se présentant sous la forme d'un demi tube. Il est constitué de deux longs murs de neige de forme arrondie qui se font front et se rejoignent en leur base. Un half-pipe classique a une hauteur de murs d'à peu près 5 mètres mais les plus gros, dits « SuperPipes », peuvent aller jusqu'à 7 mètres.



**Descente en snowboard**

On s'intéresse à la descente du snowboarder sur la piste enneigée de longueur  $L = 40$  m inclinée d'un angle  $\alpha = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale. Il part de l'origine  $O$  avec une vitesse quasi-nulle, et on cherche à déterminer la vitesse qu'il acquiert en bas de la piste, en  $B$ .



On néglige les frottements de l'air sur le snowboarder, mais les frottements de la neige sur le snowboarder ne le sont pas. Ils sont modélisés par les lois de Coulomb de coefficient de frottement  $f = 0,5$ .

Q1. Déterminer les expressions des normes de la réaction normale et tangentielle.

Quel est le sens de la réaction tangentielle ? En déduire l'expression de  $\vec{R}_T$ .

Q2. Déterminer, par une méthode énergétique judicieusement choisie, la vitesse acquise par le snow-boarder en bas de la descente.

Effectuer l'application numérique.

**Exercice 2** Exercice de cours : le pendule simple (Durée : MAXIMUM 30 min)

Q1. Définir le moment cinétique d'un point matériel  $M$  par rapport au point  $A$ .

Q2. Définir le moment de la force  $\vec{f}$  s'exerçant sur le point matériel  $M$  par rapport au point  $A$ .

On étudie le désormais classique pendule simple, constitué d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  accroché à l'extrémité d'un fil inextensible sans masse de longueur  $\ell$ . On repère la position du point  $M$  par l'angle  $\theta$  entre la verticale descendante et le fil. Tous les frottements sont négligés.

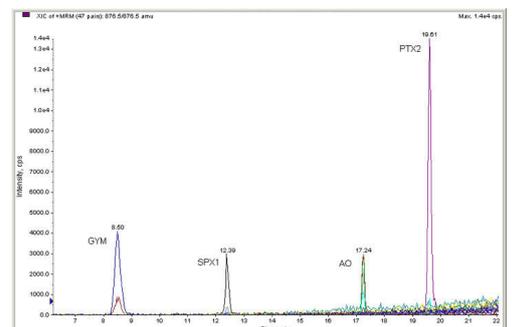
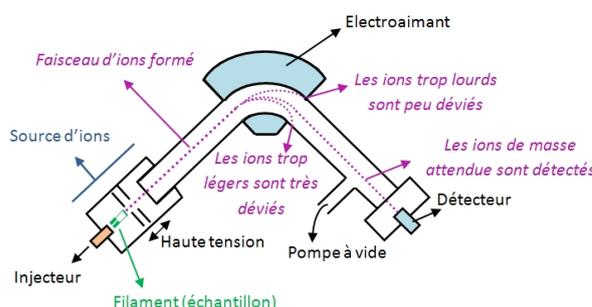
On note  $(Oz)$  l'axe perpendiculaire au plan du mouvement.

Q3. Exprimer le moment cinétique de  $M$  par rapport à l'axe  $(Oz)$  en fonction de  $m$ ,  $\ell$  et  $\dot{\theta}$ .

Q4. Exprimer le moment des forces par rapport à l'axe  $(Oz)$  en utilisant le bras de levier. Les constructions nécessaires seront présentes sur le schéma. Les signes des moments devront être justifiés.

Q5. Établir l'équation du mouvement vérifiée par  $\theta$  en utilisant une loi du moment cinétique.

**Exercice 3** Spectromètre de masse (Durée : 1h15 )



La France produit l'essentiel de son électricité – environ 75 % – à partir de centrales électriques nucléaires. Ces centrales utilisent comme source d'énergie un « combustible » constitué d'oxyde d'uranium enrichi en uranium 235, seul isotope

fissile, afin d'atteindre une teneur de l'ordre de 4 %. Avant utilisation dans une centrale, le minerais doit donc d'abord être traité afin de produire ce combustible. Les deux principaux isotopes de l'uranium sont  ${}_{92}^{235}\text{U}$  et  ${}_{92}^{238}\text{U}$  de masses molaires respectives  $235,0439 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $238,0508 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

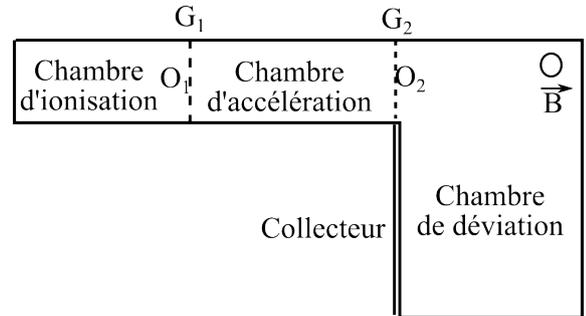
Q1. Exprimer la masse d'un atome d'uranium 235 (resp. 238) en fonction de la masse molaire de l'uranium 235 (resp. 238) et de la constante d'Avogadro.

### Séparation des isotopes par spectrométrie de masse

L'enrichissement de l'uranium a pour but d'élever la teneur en  ${}^{235}\text{U}$  de l'uranium de départ à une valeur optimale pour l'application souhaitée. Une des méthodes est la spectrographie de masse qui reste la méthode la plus sensible d'analyse isotopique.

Un spectrographe de masse se compose de quatre parties :

- La chambre d'ionisation dans laquelle des atomes d'uranium  ${}_{92}^{235}\text{U}$  et  ${}_{92}^{238}\text{U}$  de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$  portés à haute température sont ionisés en ions  $U^+$ . On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en  $O_1$ , la vitesse des ions est quasi nulle.
- La chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre  $O_1$  et  $O_2$  sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles  $G_1$  et  $G_2$ .
- La chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  de direction perpendiculaire au plan de la figure.
- Un collecteur d'ions constitué d'une plaque photosensible.



Les chambres sont sous vide, ce qui permet de considérer que les particules n'interagissent pas entre elles. On négligera le poids des ions devant la force électromagnétique et on admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vitesses des ions sont contenues dans le plan de la figure.

### Accélération des ions

Les ions passent, entre  $O_1$  et  $O_2$ , dans une zone où règne un champ électrique uniforme et permanent  $\vec{E}$ .

- Q2. Donner la force de Lorentz subie par les ions, et l'énergie potentielle électrostatique en fonction du potentiel  $V$  et de la charge élémentaire.
- Q3. En proposant des ordres de grandeur raisonnables, justifier que l'on peut négliger le poids devant la force de Lorentz.
- Q4. Établir l'expression de l'augmentation de l'énergie cinétique des ions  $U^+$  entre  $O_1$  et  $O_2$ . On l'exprimera en fonction de la différence de potentiel  $V_{G_1} - V_{G_2}$ .  
Quel doit être le signe de la différence de potentiel  $V_{G_1} - V_{G_2}$  pour que les ions soient accélérés entre  $O_1$  et  $O_2$  ?
- Q5. Établir les expressions des vitesses  $v_{235}$  et  $v_{238}$  respectivement des ions  ${}_{92}^{235}\text{U}^+$  et  ${}_{92}^{238}\text{U}^+$  lorsqu'ils parviennent en  $O_2$  en fonction de  $m_{235}$  (resp.  $m_{238}$ ) et  $U = V_{G_1} - V_{G_2}$ .
- Q6. L'énergie cinétique acquise par les ions en  $O_2$  est de 15,0 keV. En déduire la valeur de la tension  $U$  appliquée entre les deux grilles.  
Déterminer numériquement les vitesses  $v_{235}$  et  $v_{238}$ .

### Déviation des ions

- Q7. Quel doit être le sens du champ magnétique  $\vec{B}$  (perpendiculaire au plan de la figure) régnant dans la chambre de déviation pour que les ions puissent atteindre le collecteur ?
- Q8. Justifier précisément que le mouvement dans le champ magnétique est uniforme.
- Q9. Faire un schéma, représenter dessus, le champ magnétique, la trajectoire, les vecteurs de la base de Frenet et les vecteurs vitesse et accélération.  
Exprimer les vecteurs vitesse et accélération, simplifier ce dernier compte tenu de la question précédente.
- Q10. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, exprimer le rayon de courbure de la trajectoire en fonction de la vitesse  $v$  de la particule, de la masse  $m$ , de la charge élémentaire  $e$ , du champ magnétique  $B$ .  
Comment est ce rayon de courbure ? Que peut-on en déduire sur la nature du mouvement ?
- Q11. En déduire rayon  $R_{235}$  en fonction de  $m_{235}$ ,  $e$ ,  $U$  et  $B$ .  
Faire de même pour un faisceau homocinétique d'ions  ${}_{92}^{238}\text{U}^+$ , on notera  $R_{238}$  le rayon de leur trajectoire.

Les trois dernières questions sont plus difficiles.

- Q12. Le collecteur consiste en un récipient métallique muni d'une fente centrée en  $F$  de largeur  $L'$  placée entre  $M$  et  $N$  qui permet de recueillir les isotopes 235.  
Quelle doit être la valeur du champ magnétique régnant dans le spectromètre sachant que la fente  $F$  est placée à  $D = 940$  mm de  $O_2$  ?
- Q13. Le faisceau d'ions émis en  $O_2$  est un faisceau parallèle dans le plan de la figure. La fente du collecteur a une largeur de  $L' = 4,0$  mm dans le plan de la figure.  
Peut-il y avoir séparation isotopique dans le récipient du collecteur ?
- Q14. L'intensité du faisceau utilisé dans le spectromètre est de 100 mA. La source est alimentée en uranium contenant 0,7 % de  ${}_{92}^{235}\text{U}^+$  et 99,3 % de  ${}_{92}^{238}\text{U}^+$ .  
Quelle quantité de l'isotope 235 le spectromètre peut-il isoler en une année de fonctionnement continu ?

**Exercice 4** Satellite de Jupiter (Durée : 1h15)

Jupiter est la planète la plus volumineuse du système solaire et fait partie des planètes « géantes gazeuses ». Compte tenu du rôle central de la planète géante dans la formation du système solaire, celle-ci intrigue toujours les scientifiques puisque de nombreuses questions concernant sa formation restent sans réponse. En particulier, deux scénarios s'affrontent sur la manière dont la planète Jupiter s'est constituée :

- premier scénario : la planète s'est formée en deux temps - accréition 1 des matériaux situés dans son voisinage jusqu'à former un noyau solide représentant une dizaine de masses terrestres puis effondrement gravitationnel de la masse de gaz et de poussière entourant la planète ;
- second scénario : celui-ci repose sur le seul effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz et de poussières mais nécessite la présence d'une nébuleuse originelle de plus grande taille que celle retenue dans les scénarios de formation du système solaire.

La sonde Juno a pour objectif principal de résoudre ce dilemme en collectant des données permettant de reconstituer l'histoire de la formation de la planète géante et son évolution.

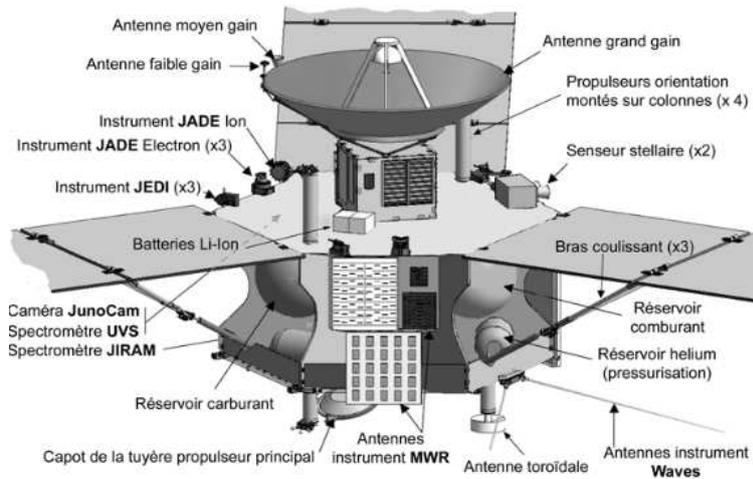


FIGURE 1 – Présentation de la sonde Juno - D'après Wikipedia

| Satellite | Distance moyenne au centre de Jupiter | Période de révolution sidérale |
|-----------|---------------------------------------|--------------------------------|
| Io        | $4,218 \cdot 10^5$ km                 | 1,769 jour                     |
| Europe    | $6,714 \cdot 10^5$ km                 | 3,551 jours                    |
| Ganymède  | $1,070 \cdot 10^6$ km                 | 7,155 jours                    |
| Callisto  | $1,883 \cdot 10^6$ km                 | 16,689 jours                   |

- Masse de la Terre  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg
- Masse de Jupiter  $M_J = 1,97 \cdot 10^{27}$  kg
- Rayon de la Terre  $R_T = 6,4 \cdot 10^3$  km
- Rayon de Jupiter  $R_J = 7,0 \cdot 10^4$  km
- Rayon de l'orbite terrestre  $d_T = 1,50 \cdot 10^8$  km
- Rayon de l'orbite de Jupiter  $d_J = 7,80 \cdot 10^8$  km
- Période de révolution sidérale de la Terre  $T_T = 365,25$  jours

**S'échapper de la Terre**

Une des prouesses technologiques du siècle dernier a été de pouvoir s'échapper de la surface de la Terre afin d'envoyer hommes, satellites et instruments de mesure hors de l'atmosphère. Lancée en 2011 depuis la Terre, la sonde Juno restera en orbite autour de Jupiter jusqu'au mois de juillet 2021.

Pour libérer un objet  $M$  de masse  $m$  de l'attraction gravitationnelle terrestre, on comprend qu'il est nécessaire de le " lancer " vers l'espace avec une vitesse suffisamment importante. La vitesse de libération de la Terre  $v_\ell$  est précisément la vitesse minimale, évaluée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il " s'échappe ".

Q1. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à l'objet  $M$  entre l'instant initial ( $M$  à la surface de la Terre) et l'instant final ( $M$  à l'infini), déterminer la vitesse de libération  $v_\ell$  en fonction de la masse  $M_T$  de la Terre,  $G$  la constante universelle de gravitation, et  $R_T$  le rayon de la Terre. Calculer numériquement  $v_\ell$ .

### Caractéristiques de la trajectoire

La sonde Juno devait, en tout, effectuer 36 révolutions complètes autour de Jupiter et achever sa mission en février 2018 mais un problème de moteur a contraint les ingénieurs à la laisser sur une **orbite elliptique de 53 jours**.

On assimile la sonde Juno à un point matériel  $P$  de masse  $m$  soumis uniquement à la force d'interaction gravitationnelle exercée par Jupiter de masse  $M_J$ . En outre, le centre  $O$  de Jupiter est supposé immobile dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen et la sonde est repérée par le vecteur position  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ .

Q2. Dans quelle circonstance est-il légitime de supposer que le centre de Jupiter est immobile ?

Q3. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel jupiterocentrique, montrer que le moment cinétique  $\vec{L}_O(P/\mathcal{R})$  est constant au cours du temps.

Conclure que le mouvement de la sonde est plan. Définir ce plan.

Il est donc plus judicieux de travailler en coordonnées cylindriques plutôt qu'en coordonnées sphériques. De plus, on choisit  $O$  comme étant l'origine du système de coordonnées cylindriques. Ce système de coordonnées est illustré sur la figure 2.

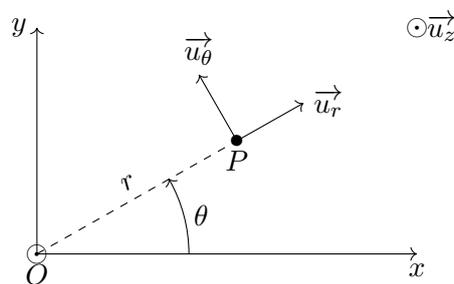


FIGURE 2 – Paramétrage cylindrique

Q4. Déterminer les expressions du vecteur position  $\vec{r}$  et du vecteur vitesse  $\vec{v}(P/\mathcal{R})$  dans la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .

Q5. On définit le vecteur  $\vec{C}$  par  $\vec{C} = \frac{\vec{L}_O(P/\mathcal{R})}{m}$ . En exprimant  $\vec{C}$  dans la base cylindrique orthonormée directe  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , montrer que  $r^2 \frac{d\theta}{dt}$  est une constante du mouvement que l'on exprimera en fonction de  $C = \vec{C} \cdot \vec{u}_z$ .

Q6. Déterminer l'énergie mécanique de la sonde et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\mathcal{E}_m(P/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

On exprimera  $U_{\text{eff}}(r)$  en fonction de  $m, C, G, M_J$  et  $r$ .

Justifier que  $\mathcal{E}_m$  se conserve.

Q7. Tracer l'allure de  $U_{\text{eff}}(r)$  et discuter les trajectoires possibles de la sonde en fonction de  $\mathcal{E}_m$ .

On distinguera en particulier les états qualifiés de liés de ceux dits de diffusion.

Q8. Énoncer la troisième loi de Kepler.

Q9. En utilisant les données, déterminer le demi-grand axe  $a$  de l'orbite elliptique de la sonde.

### Satellites de Jupiter

On étudie le mouvement de Io, que l'on suppose circulaire de rayon  $R$ .

Q10. Justifier que le mouvement circulaire d'un satellite est nécessairement uniforme.

Q11. Établir l'expression de la norme de la vitesse du satellite en fonction de  $G, M_J$  et  $R$ .

Q12. En déduire la période du mouvement de Io en fonction de  $G, M_J$  et  $R$ . La calculer numériquement.

Retrouver la troisième loi de Kepler.

Q13. Exprimer l'énergie mécanique de Io en fonction de  $G, m, M_J$  et  $R$ .