? À rendre le mercredi 27 mars 2024

Devoir Maison n°16

Travail à rendre :

- Exercices 2 & 3 : obligatoires pour Aurélien, Élise, Giovanni, Ouadi, Younes, Fatma, Ethan, Nadir, Baptiste, Gaspard.
- Pour les autres : au minimum exercice 1 ou 2 (au choix).
  L'exercice 1 est nettement plus facile, il est conseillé si vous rencontrez des difficultés.

Exercice n°1 Marcher à son rythme pour aller loin

Le pas pendulaire effectué à la période propre de la jambe est le plus économe en énergie. La gravité devient l'allié naturel de nos muscles pour permettre le déplacement.
On se propose ici de déterminer la période propre d'oscillations d'une jambe adulte en utilisant un modèle mécanique simple.
Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère cartésien $(O;\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$.
On assimile la jambe à un solide rigide de masse m_o et de longueur d en rotation autour de l'axe horizontal $(O,\overrightarrow{e_x})$ fixe dans le référentiel d'étude. $(O,\overrightarrow{e_x})$ passe par la hanche du randonneur (il est sortant sur la figure 1).
La liaison pivot en O est supposée parfaite. Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{e_x})$ est notée J. On néglige tout frottement. On note H le centre d'inertie de la jambe situé à la distance d' de O. La jambe ne touche pas le sol dans cette étude.
γ est l'angle entre la verticale passant par O et la droite (OH).
L'accélération de la pesanteur, notée $\overrightarrow{g}=-g\overrightarrow{e_z}$, est supposée uniforme.

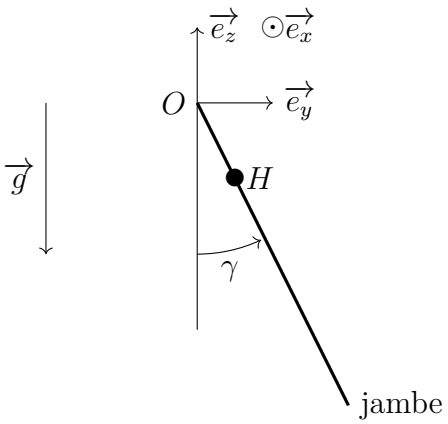

FIGURE 1 – Modélisation de la jambe

Q1. Donner sans démonstration l'expression du moment cinétique scalaire, L_{Ox} de la jambe par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{e_x})$ en fonction de γ et J.

Q2. Que vaut le moment par rapport à $(O,\overrightarrow{e_x})$ de l'action mécanique de la liaison en O ? Justifier.

Q3. Donner l'expression du moment Γ_{Ox} du poids de la jambe par rapport à $(O,\overrightarrow{e_x})$ en fonction de g, m_o, d' et γ.

Q4. Établir l'équation différentielle vérifiée par γ, caractérisant le mouvement de la jambe.

On souhaite retrouver cette équation à l'aide d'une méthode énergétique.

Q5. Donner sans démonstration l'expression de l'énergie cinétique de la jambe.

Q6. Donner sans démonstration l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur de la jambe en fonction de m_o, g, d', γ et d'une constante.

Q7. Justifier que l'énergie mécanique de la jambe se conserve au cours du temps.

Q8. En déduire l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par γ caractérisant le mouvement de la jambe.

Q9. En se plaçant dans l'approximation des petites oscillations, montrer que la période propre d'oscillations de la jambe est : $T = \dfrac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_o g d'}}$

Q10. Le moment d'inertie de la jambe est de la forme : $J = k m_o d^2$ où k est une constante positive. Le centre d'inertie H de la jambe est situé à mi-hauteur de la jambe. En déduire que la période propre T de la jambe est indépendante de la masse et qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de la jambe.

Q11. Un randonneur adulte a une jambe d'environ 90 cm. La période d'oscillations de sa jambe est de 1,6 s. Quelle est la période propre d'oscillations de la jambe d'un randonneur enfant dont la jambe mesure environ 40 cm ?

Q12. À l'aide d'une description simple du pas effectué, montrer que la vitesse du randonneur, lorsqu'il respecte sa période d'oscillations naturelle, est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de sa jambe. Montrer que la vitesse « naturelle » de l'enfant est environ 1,5 fois moins grande que celle de l'adulte.

Exercice n°2 Expérience d'Eötvös

Un aspect fondamental de la gravitation est le principe d'équivalence. Introduit par Galilée au début du XVII^{e} siècle alors qu'il étudiait la chute des corps, il fût le point de départ du développement de la théorie de la gravitation. Un peu moins d'un siècle plus tard, Newton fut le premier à décrire l'interaction gravitationnelle par une formule. Il en déduisit la version la plus élémentaire du « principe d'équivalence faible » : la trajectoire d'un corps tombant en chute libre ne dépend ni de sa structure, ni de sa composition.
Ce problème propose une description de l'expérience d'Eötvös, ayant permis dès la fin du XIX^{e} siècle, de valider une version réduite du principe d'équivalence avec une grande précision pour l'époque. L'expérience d'Eötvös utilise un pendule de torsion. Dans le dispositif simplifié, représenté sur la figure 2 ci-dessous, deux sphères appelées S_1 et S_2, homogènes de nature différente et de même masse pesante m ont leurs centres d'inertie placés aux extrémités d'une barre rigide, de masse M et de longueur $2L$, suspendue en son centre à un fil de quartz très fin, de constante de torsion C. On note m_{i1} et m_{i2} les masses inertielles respectives de S_1 et de S_2. La barre est libre de tourner autour de l'axe Oz en tordant plus ou moins le ruban de suspension. On suppose que la barre reste tout le temps de l'expérience dans le plan orthogonal à l'axe Oz.
Le dispositif est placé de sorte qu'à l'équilibre, la barre soit normale au plan méridien à la latitude λ. Sa position est alors repérée par réflexion d'un faisceau lumineux sur un miroir plan, fixé au milieu de la barre, à l'aide d'une lunette.

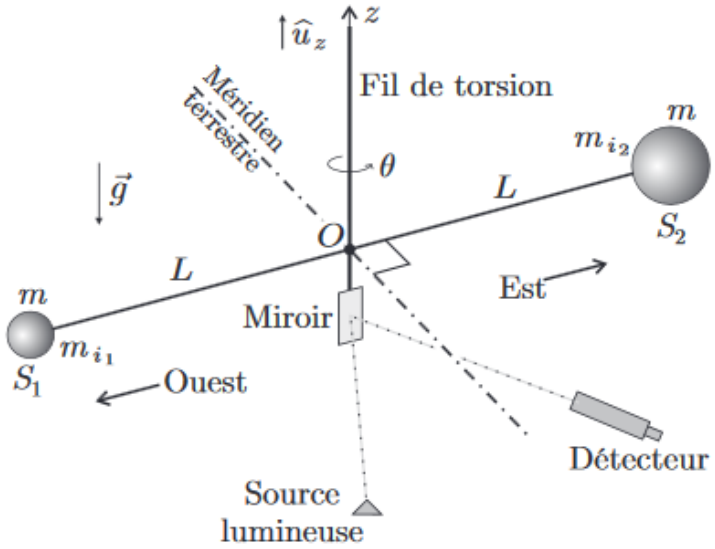

Figure 2 – Dispositif d'Eötvös

On note $\mathscr{R}$ le référentiel du laboratoire centré sur O et supposé galiléen dans cette sous-partie où l'objectif est la détermination de la constante de torsion C du pendule.
On note J_0 le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe vertical (Oz) et J le moment d'inertie du système $S = \{barre + sphères\}$ par rapport à (Oz).
On repère la position de la barre à l'instant t par l'angle de torsion $\theta(t)$. On fait tourner le système d'un angle θ_m puis on le lâche sans vitesse initiale.
Le fil exerce alors sur la barre un couple de rappel dont le moment par rapport à (Oz) a pour intensité $\mathscr{M}_{Oz} = -C(\theta(t) - \theta_0)$, l'angle θ_0 repère la position de la barre en l'absence de torsion.

On définit l'énergie potentielle associée à un couple de forces conservatif par la relation $\mathscr{M} = -\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}\theta}$ où $\mathscr{M}$ est le moment du couple par rapport à l'axe de rotation.

Q1. En déduire l'expression de l'énergie potentielle associée au couple de torsion. On choisira $\mathscr{E}_p(\theta_0) = 0$.
En déduire l'expression de l'énergie mécanique de S en fonction de C, J, θ, θ_0 et $\dot{\theta}$.

Q2. On fait l'hypothèse que la puissance totale des forces de frottement peut se mettre sous la forme $\mathscr{P}_{\text{frot}} = -\alpha\dot{\theta}^2$ où α est une constante positive. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

Q3. On observe des oscillations très faiblement amorties.

Quelle est la condition satisfaite par les constantes C, J et α ?

Préciser la forme de la solution sans déterminer l'expression exacte des deux constantes d'intégration.

Quelle est la valeur θ_∞ de $\theta(t)$ lorsque $t \to \infty$?

Exprimer la pseudo-période T du mouvement en fonction de la période propre T_0 et de la constante $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2\sqrt{JC}} \ll 1$.

À quelle condition sur ε, l'erreur relative introduite par l'approximation $T \approx T_0$ est-elle inférieure à 1 % ?

Cette condition est supposée vérifiée par la suite.

On note J_1 les moments d'inertie, considérés égaux, de chacune des deux sphères par rapport à l'axe vertical passant par leurs centres respectifs.

On admettra que si le principe d'équivalence faible s'applique alors $J = J_0 + 2J_1 + 2mL^2$.

On mesure la période T des oscillations pour différentes valeurs de la longueur L avec des sphères de masse pesante $m = 0,2$ kg. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-contre :

L [m]	$6,0.10^{-2}$	$7,0.10^{-2}$	$8,0.10^{-2}$
T [s]	436	509	581

Q4. En utilisant les résultats précédents, écrire la relation entre T^2, L^2, J_0, J_1, m et C.

À partir des résultats de mesure, donner une estimation de la valeur de la constante de torsion C.

Compte-tenu des ordres de grandeurs des différents termes intervenant dans l'expression de T, montrer que l'on peut écrire : $m \approx \dfrac{C}{8\pi^2}\dfrac{T^2}{L^2}$.

Exercice n°3 Patinage artistique

À l'aide de la vidéo https://www.youtube.com/watch?v=iWtYVD3yPm4, calculer le travail des actions mécaniques intérieures quand la patineuse serre les bras au niveau de son buste.

Données :

- Moment d'inertie d'un cylindre plein, de masse m et de rayon R par rapport à son axe de rotation : $J(\text{cylindre}) = \dfrac{1}{2}mR^2$
- Moment d'inertie d'une barre de masse m de longueur ℓ par rapport à un axe perpendiculaire à la la barre et passant par son centre d'inertie : $J(\text{barre}) = \dfrac{1}{12}m\ell^2$
- On admet que l'on peut sommer les moments d'inertie de plusieurs solides par rapport au même axe de rotation.
- Les bras représentent environ 3 % de la masse corporelle.