

? Lundi 20 mars 2023
Devoir Surveillé n°8 (1) – Durée : 4 heures

La calculatrice est autorisée.

Chapitres concernés : Mécanique du point

- Mouvement de particules chargées dans un champ électrique ou magnétique
- Théorème du moment cinétique pour le point matériel
- Mouvement à force centrale conservative

2 Consignes à respecter

- Lire la totalité de l'énoncé et commencer par les exercices les plus abordables.
- Présentation de la copie :
 - Prendre une **nouvelle copie double pour chaque exercice**.
 - Tirer un **trait horizontal** à travers toute la copie **entre chaque question**.
 - Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
 - **Numéroter les pages** sous la forme x/nombre total de pages.
- Rédaction :
 - Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
 - **Justifier** toutes vos réponses.
 - Applications numériques : nombre de **chiffres significatifs adapté** et avec une **unité**.

Ce sujet comporte 4 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

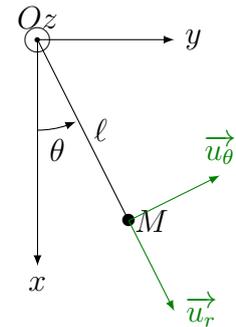
L'énoncé est constitué de **10** pages.

Les copies de concours sont numérisées en couleur, pour cela, vous devez respecter les consignes suivantes :

- Composer à l'encre **BLEUE** ou **NOIRE NON EFFAÇABLE**. Pas de stylo plume ni de stylos « friction ».
- Si vous souhaitez réaliser des schémas ou mettre des résultats en évidence, vous pouvez utiliser des couleurs, **SAUF LE VERT ET LE TURQUOISE**. Vous pouvez également utiliser des feutres ou des surligneurs.
- Ne pas utiliser de correcteur (tipex par exemple).

Problème n°1 Exercice de cours : le pendule simple (~ 20 min)

On étudie le désormais classique pendule simple, constitué d'un point matériel M de masse m accroché à l'extrémité d'un fil inextensible sans masse de longueur ℓ . On repère la position du point M par l'angle θ entre la verticale descendante et le fil. Tous les frottements sont négligés.



- Q1. Définir le moment cinétique de M par rapport à l'axe (Oz) , puis l'exprimer en fonction de m , ℓ et $\dot{\theta}$.
- Q2. Définir le moment d'une force \vec{f} par rapport à l'axe (Oz) .
Exprimer le moment des forces qui s'exercent sur M par rapport à l'axe (Oz) en utilisant le bras de levier. Les constructions nécessaires seront présentes sur le schéma. Les signes des moments devront être justifiés.
- Q3. Après avoir énoncé le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) , établir l'équation du mouvement vérifiée par θ .

Problème n°2 LHC (Durée : 1h30)

Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider ; LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de **27 kilomètres de circonférence** et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.

Dans les accélérateurs de particules, des protons (ou des ions) de très haute énergie circulant dans deux faisceaux tournant à contre-sens se choquent les uns contre les autres, dans le but de rechercher des indices de la supersymétrie, de la matière noire et de l'origine de la masse des particules élémentaires. Les faisceaux se composent de paquets contenant des centaines de milliards de protons chacun.

Voyageant quasiment à la vitesse de la lumière, ils sont injectés, accélérés, et maintenus en circulation pendant des heures, guidés par des milliers d'aimants supraconducteurs puissants.

L'énergie cinétique des protons (7 TeV) est transformée au moment du choc en une myriade de particules exotiques, que les détecteurs observent avec attention. Le 04 juillet 2012, les chercheurs ont annoncé l'observation du boson de Higgs dont l'existence était prédite par le modèle standard.

Dans cet exercice, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider. Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite. Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

I Particule dans un champ électrique constant et uniforme

Q1. Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} ?

Q2. Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ $E = 100 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.

Q3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer l'accélération que ressent un proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} .

Que peut-on dire du vecteur accélération ?

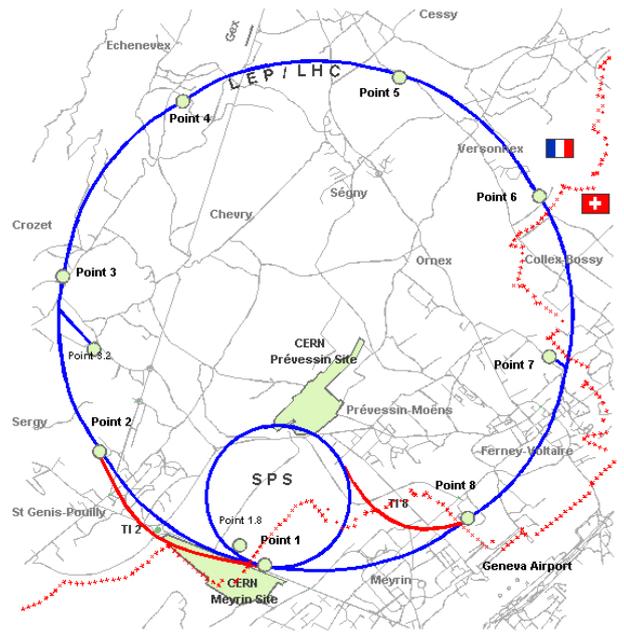


FIGURE 1 – Site du CERN, dans les environs de Genève. Le grand cercle représente la position du tunnel du LHC.

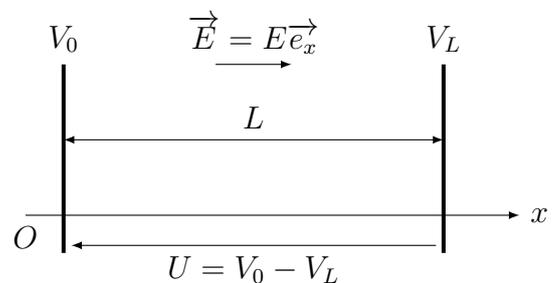


FIGURE 2 – Schéma du dispositif d'accélération des protons

Q4. Donner l'expression de l'énergie potentielle électrique d'une particule chargée de charge q en fonction du potentiel électrique V .

Q5. En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique du proton sortant de la zone d'accélération, en fonction de la tension U .

II Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN.

Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale U_c toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-acceleratrice U_0 .

Source de protons pré-accelérés
par une tension U_0

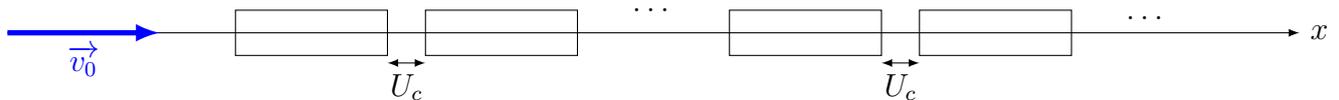


FIGURE 3 – Le linac 2

- Q6. Exprimer l'énergie cinétique du proton, puis sa vitesse v_0 en O , en fonction de U_0 , e et m_p .
- Q7. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?
- Q8. Exprimer l'énergie cinétique du proton à la sortie du n -ième tube (attention : après n tubes, il y a eu $n - 1$ zones accélératrices) en fonction de U_c et U_0 .
- Q9. Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10^e tube pour $U_0 = 200$ kV, $U_c = 2000$ kV.
- Q10. Sachant qu'une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, ces protons sont-ils relativistes ?

III Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS).

Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.

On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

À $t = 0$ sa vitesse \vec{v}_0 est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 4.

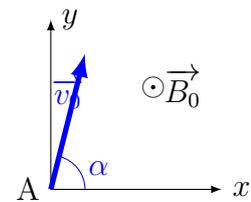


FIGURE 4 – Vitesse du proton dans le champ magnétique

- Q11. Donner l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique \vec{B}_0 .
- Q12. Reproduire la figure 4 sur votre copie afin de représenter la force magnétique subie par le proton en A. Exprimer la norme de cette force.
- Q13. Calculer un ordre de grandeur de la force précédente et conclure à l'action du poids sur le mouvement du proton.
- Q14. Montrer que le travail associé à cette force est nul à chaque instant. En déduire une caractéristique du mouvement du proton.

Le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique.

- Q15. Établir la nature de la trajectoire et exprimer son rayon en fonction de m_p , B_0 , e et v_0 .
- Q16. Représenter sur le schéma précédent la trajectoire suivie par le proton.

Les aimants utilisés, de 15 m de long et d'environ 35 tonnes, produisent en leur cœur un champ magnétique environ 200 000 fois plus grand que le champ magnétique terrestre. Le LHC en nécessite 1232.

Problème n°3 Satellites GPS (Durée : 1h30)

Le principe du positionnement par GPS (Global Positioning System ou Géopositionnement Par Satellite) repose sur la mesure de la durée de transit d'un signal transmis par une onde électromagnétique (OEM) entre des satellites dont la position est exactement connue à tout instant, dénommés NAVSTAR (NAVigation Satellite Timing And Ranging) et un récepteur. Cette durée est ensuite simplement convertie en distance puisqu'on connaît très précisément la célérité d'une OEM. Pour une précision optimale, un récepteur sur Terre doit « voir » au minimum quatre satellites simultanément.

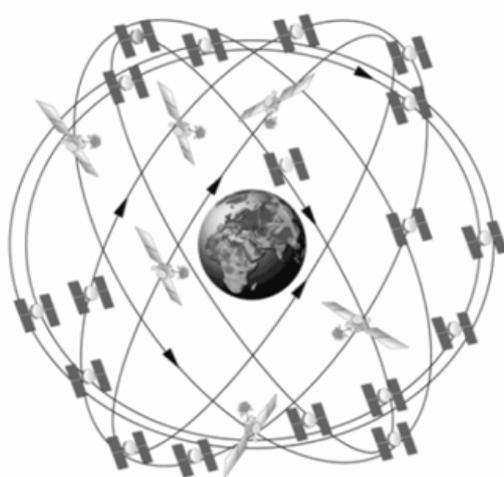


FIGURE 5 – Constellation satellite GPS Public domain,

<http://www.gps.gov/multimedia/images/constellation.gif>

Vu sur le site <https://www.maamittauslaitos.fi/en/reseach/interesting-topics/satellite-based-positioning-systems>

Le système fut mis en place par le département de la Défense des États-Unis à partir de 1973, à l'origine, uniquement à des fins militaires. Avec ses vingt-quatre satellites, il est devenu totalement opérationnel en 1995. Le 2 mai 2000, le président étatsunien Bill Clinton confirme l'intérêt de la technologie à des fins civiles et autorise une diffusion non restreinte des signaux GPS, permettant une précision de l'ordre d'une dizaine de mètres et une démocratisation de la technologie au grand public à partir du milieu des années 2000. De nos jours les récepteurs GPS se sont banalisés et ont envahi notre environnement quotidien (automobile, smartphones, montre connectée, etc).

Le système comprend vingt-quatre satellites placés sur des **orbites pratiquement circulaires d'altitudes voisines de $2,00 \times 10^4$ km** (voir figure 5). Les satellites sont placés sur six orbites dont le plan est incliné de 55° par rapport au plan de l'équateur. Ces orbites sont décalées en longitude de 60° . Sur chaque orbite, il y a quatre satellites. On notera pour information que les satellites ne sont pas régulièrement espacés sur leur orbite. Leur répartition a été choisie pour optimiser le nombre de satellites visibles en chaque point de la Terre à un instant « t ». Les zones les plus défavorisées sont voisines des pôles. Sur la photo de la figure 6 prise lors de la phase finale d'assemblage, on peut se faire une idée des dimensions d'un satellite NAVSTAR munis de ses panneaux solaires en le comparant à la personne située à ses côtés.

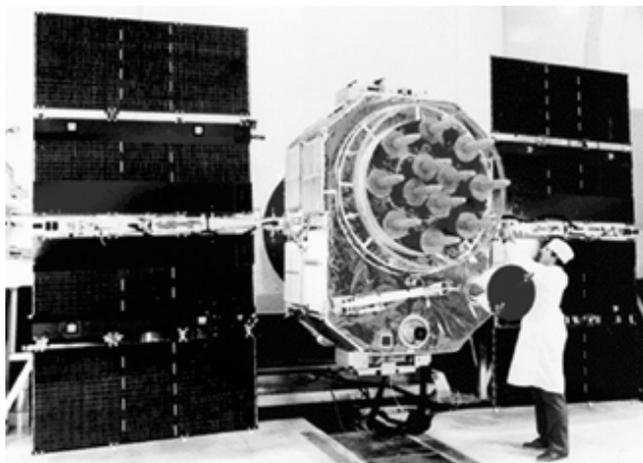


FIGURE 6 – Satellite NAVSTAR

Public domain, <http://www.gps.gov/multimedia/images/constellation.gif>
Vu sur le site <https://www.maamittauslaitos.fi/en/reseach/interesting-topics/satellite-based-positioning-systems>

Dans tout le problème, le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique supposé galiléen. Les données nécessaires sont regroupées en annexe à la fin de l'énoncé.

- Q1. Rappeler l'expression de la force de gravitation \vec{F} exercée par la Terre sur un satellite NAVSTAR. Le centre de la Terre est situé en O . On notera r la distance OM du satellite (masse ponctuelle m) placé au point M , $r > R_T$ où R_T est le rayon terrestre. On exprimera \vec{F} en fonction de la constante de gravitation universelle G , des autres données et on utilisera le vecteur unitaire noté habituellement \vec{u}_r en coordonnées sphériques (figure 7).

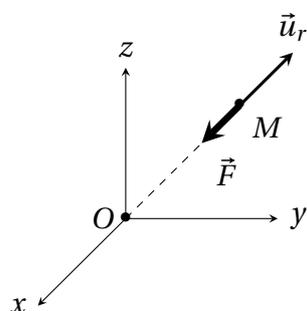


FIGURE 7 – Repère sphérique

- Q2. En ne prenant en compte que cette unique force d'attraction qui s'exerce sur le satellite, montrer que :
- le moment cinétique se conserve ;
 - sa trajectoire est plane ;
 - la grandeur $r^2\dot{\theta}$ se conserve au cours du mouvement ; comment s'appelle cette grandeur ? à quelle loi de Kepler est-elle reliée ?
 - son énergie mécanique notée E_m est conservée ;
 - et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$$

avec A et B deux constantes positives à définir, s'exprimant en fonction de m , M_T , G et de la constante des aires C . L'énergie potentielle est prise nulle à l'infini.

Q3. Soit la fonction $E_{p,\text{eff}} = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$.

Tracer son allure puis prouver qu'elle passe par un minimum noté r_0 . Exprimer r_0 en fonction de A et B puis donner sa signification physique ainsi que l'ordre de grandeur de sa valeur numérique pour un **satellite NAVSTAR placé sur son orbite de travail**. Comment est habituellement dénommée cette fonction $E_{p,\text{eff}}$?

On donne la définition d'un jour sidéral terrestre : c'est la durée que met la Terre pour faire un tour sur elle-même par rapport au point vernal (point considéré comme fixe dans le référentiel héliocentrique), indépendamment de sa révolution autour du Soleil. Elle vaut environ 23 h 56 min 4 s.

Q4. Établir l'expression de la norme du vecteur vitesse v_0 sur le mouvement circulaire de rayon r_0 . En déduire la troisième loi de Kepler.

Q5. Quelle est la période de révolution du satellite ? Comparer cette valeur à celle d'un jour sidéral et conclure.

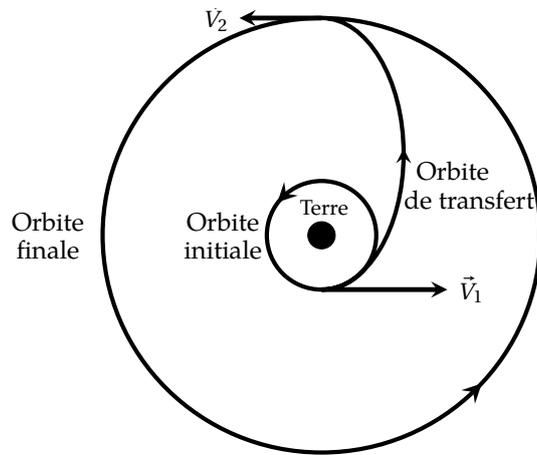


FIGURE 8 – Orbites circulaires et orbite de transfert

Le placement d'un satellite sur son orbite définitive s'effectue très schématiquement en trois phases (figure 8) :
Phase 1 : mise en orbite basse initiale supposée circulaire, de rayon $R_1 = R_T + h_1$, où $h_1 = 1,50 \times 10^3$ km.
Phase 2 : on fournit une très brève impulsion au satellite (vitesse V_1 après l'impulsion) pour le placer sur une orbite elliptique dite transfert (ou d'Hohmann) dont l'apogée se trouve sur l'orbite définitive.
Phase 3 : une seconde impulsion permet d'**atteindre l'orbite finale (de travail)** supposée circulaire de rayon R_2 où la vitesse du satellite est V_2 .

Q6. Établir l'expression de l'énergie mécanique E_{m1} d'un satellite NAVSTAR de masse $m = 800$ kg sur son orbite basse à l'altitude $h_1 = 1,50 \times 10^3$ km. On suppose l'énergie potentielle nulle à l'infini. Application numérique.

Q7. Comparer E_{m1} à $E_{m0} = \alpha \cos^2(\lambda) - \beta$, énergie mécanique du satellite posé au sol, avant son décollage, de la base de lancement située à la latitude λ . Les valeurs de α et β sont $\alpha = 8,6 \times 10^7$ J et $\beta = 5,006 \times 10^{10}$ J. Quelle est la valeur optimale pour λ ? Faire l'application numérique pour cette valeur optimale. Conclure.

Q8. À partir de l'expression de l'énergie mécanique pour une trajectoire circulaire de rayon r , on peut montrer qu'il suffit de substituer au rayon r la valeur du demi-grand axe a de l'ellipse pour généraliser cette expression à une trajectoire elliptique. En déduire la valeur numérique de l'énergie mécanique E_{m12} sur l'orbite de transfert.

On suppose que la durée d'allumage des fusées est très courte (boost) devant la période de révolution et que le satellite n'a quasiment pas bougé durant cette phase.

Q9. En déduire la variation de vitesse ΔV_1 à appliquer au satellite pour qu'il passe de l'orbite basse à celle de transfert. Effectuer l'application numérique.

Q10. Quelle est la durée du transfert ?

Pour réduire les coûts, on envisage d'autres trajectoires qui utilisent moins de satellites.

- Q11. Définir ce qu'on appelle un satellite géostationnaire en précisant les caractéristiques de son orbite, son altitude, sa visibilité depuis un point donné de la Terre, son usage et toute autre donnée jugée digne d'intérêt. On pourra par exemple se poser la question si un tel satellite pourrait se trouver de manière permanente à la verticale d'une ville française en justifiant la réponse.
- Q12. Serait-il envisageable d'utiliser uniquement des satellites géostationnaires dans un système GPS ? Expliciter votre réponse.

Problème n°4 Molécule de monoxyde de carbone (~ 45 min)

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles m_C pour l'atome de carbone et m pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera que **l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe (Ox)**.

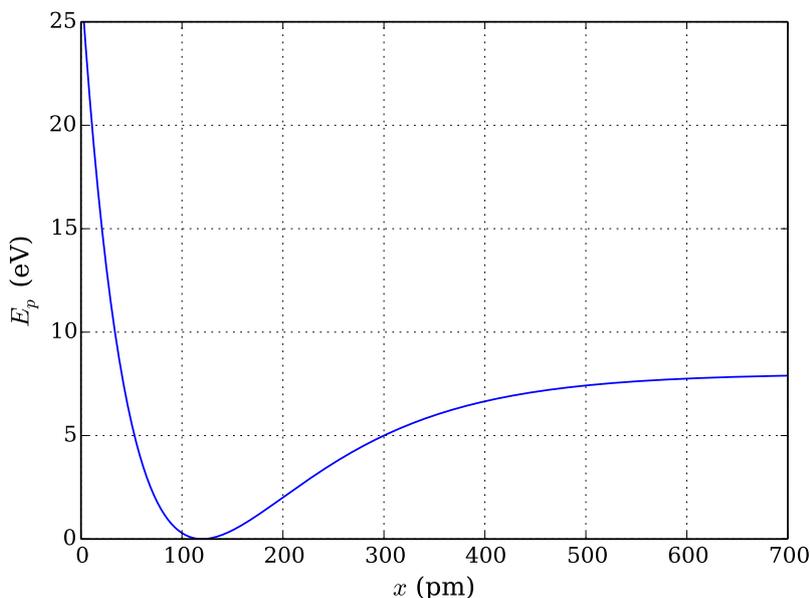
L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle.

L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_0 \left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)^2$$

où x est la distance des noyaux des deux atomes et où \mathcal{E}_0 , β et x_0 sont des constantes positives.

On donne le graphe de $\mathcal{E}_p(x)$ ci-contre.



- Q1. Déterminer la limite de \mathcal{E}_p en l'infini. En déduire, grâce au graphique, la valeur de \mathcal{E}_0 .
- Q2. Déterminer l'expression de $\mathcal{E}_p(x_0)$. En déduire, grâce au graphique, la valeur de x_0 . Que représente la position x_0 ?
- Q3. Que peut-on dire de l'énergie mécanique au cours du mouvement ?
Quelle inégalité vérifient l'énergie mécanique et l'énergie potentielle ?
- Q4. À partir de l'analyse du graphe et de la question précédente, analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à \mathcal{E}_0 .
- Q5. Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est supérieure à \mathcal{E}_0 .

On s'intéresse au mouvement de vibration de la molécule de CO au voisinage de x_0 .

On pourra poser $\varepsilon = \beta(x - x_0)$, et on rappelle qu'au premier ordre : $e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$.

- Q6. En effectuant un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle d'interaction au voisinage de x_0 (pour $\varepsilon \ll 1$), montrer qu'elle s'écrit $\mathcal{E}_p(x) \approx \mathcal{E}_0 \beta^2 (x - x_0)^2$.
 - Q7. En déduire que l'énergie mécanique s'écrit : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \mathcal{E}_0 \beta^2 (x - x_0)^2$
 - Q8. Établir l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre.
 - Q9. En déduire l'expression de la fréquence des petites oscillations de la molécule de monoxyde de carbone autour de sa position d'équilibre.
- Faire l'application numérique, avec $\beta = 8,69 \cdot 10^{-3} \text{ pm}^{-1}$; $M(O) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

ANNEXES

A Constantes fondamentales

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Charge élémentaire	$e = 1,602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante de gravitation universelle	$G = 6,67430 \times 10^{-11} \text{ USI}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,9722 \times 10^{22} \text{ kg}$
Rayon terrestre	$R_T = 6,371 \times 10^3 \text{ km}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,6726219 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

B Unités

$$\begin{aligned} \text{Énergie} \quad 1,00 \text{ eV} &= 1,602176634 \times 10^{-19} \text{ J} \\ 1 \text{ TeV} &= 10^{12} \text{ eV} \end{aligned}$$