

? Lundi 20 mars 2023
Devoir Surveillé n°8 (2) – Durée : 4 heures

La calculatrice est autorisée.

Chapitres concernés : Mécanique du point

- Mouvement de particules chargées dans un champ électrique ou magnétique
- Théorème du moment cinétique pour le point matériel
- Mouvement à force centrale conservative

2 Consignes à respecter

- Lire la totalité de l'énoncé et commencer par les exercices les plus abordables.
- Présentation de la copie :
 - Prendre une **nouvelle copie double pour chaque exercice**.
 - Tirer un **trait horizontal** à travers toute la copie **entre chaque question**.
 - Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
 - **Numéroter les pages** sous la forme x/nombre total de pages.
- Rédaction :
 - Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
 - **Justifier** toutes vos réponses.
 - Applications numériques : nombre de **chiffres significatifs adapté** et avec une **unité**.

Ce sujet comporte 3 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

L'énoncé est constitué de **10** pages.

Les copies de concours sont numérisées en couleur, pour cela, vous devez respecter les consignes suivantes :

- Composer à l'encre BLEUE ou NOIRE NON EFFAÇABLE. Pas de stylo plume ni de stylos « friction ».
- Si vous souhaitez réaliser des schémas ou mettre des résultats en évidence, vous pouvez utiliser des couleurs, SAUF LE VERT ET LE TURQUOISE. Vous pouvez également utiliser des feutres ou des surligneurs.
- Ne pas utiliser de correcteur (tipex par exemple).

Problème n°1 NASA's Mars Exploration Program : Le voyage entre la Terre et Mars (~ 2 heures)

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains. Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Les sous-parties sont largement indépendantes, mais les données numériques fournies dans les différentes parties sont susceptibles d'être utilisées ailleurs.

Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie (même s'il n'a pas été utilisé). Les principales données numériques sont regroupées dans le document réponse.

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

* Les questions précédées d'une étoile sont plus difficiles.

I Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

- Q1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.
- Q2. Montrer que le moment cinétique \vec{L}_O en O , centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.
- Q3. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_z tel que $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$.
Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de L_O et m . Quel est le nom de cette grandeur ?
- Q4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R , la vitesse V de l'objet en fonction de G , M_S , R et m .
Calculer les valeurs numériques de V_T , la vitesse orbitale de la Terre et de V_M , celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

II Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

- Q5. Dédurre l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G , M_S , R et m .
- Q6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G , M_S et R (troisième loi de Kepler).

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe de la trajectoire.

III Voyage aller Terre - Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

- Q7. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann).
Exprimer le demi-grand-axe de l'ellipse de transfert a , en fonction de a_M et a_T .

La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

- Q8. Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de V_T , a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert.
En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T .

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

- Q9. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.
- Q10. * Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t = 0) - \theta_T(t = 0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.
- Q11. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

IV Durée de la mission

Toujours pour minimiser le coût énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

- Q12. * Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars.
- Q13. * En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta \vec{V}_T$ colinéaire à \vec{V}_T plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25% de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil.

On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$. On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

- Q14. Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.
- Q15. Justifier que r_P , le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie $r_P = a_T$.
- Q16. Montrer que l'excentricité s'écrit

$$e = \frac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$$

et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la figure B l'allure de la trajectoire.

- Q17. Exprimer l'énergie mécanique E_M du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m , V_T et e .
- Q18. En déduire la vitesse V_T'' que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e .
- Q19. Donner, en fonction de V_T et e , la variation de vitesse $\Delta V_T' = V_T'' - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T'$.
- Q20. Exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de a_T et V_T'' .
- Q21. * Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars.

On donne :

$$\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = 2,15$$

avec l'excentricité calculée en question Q16.

Problème n°2 Aurores boréales (~ 1h15)

* Les questions précédées d'une étoile sont plus difficiles.

I Aurores polaires terrestres

Les aurores polaires sont des phénomènes lumineux se produisant entre 80 et 400 km d'altitude causés par la précipitation de particules chargées en provenance de l'espace sur les atomes et les molécules des couches externes de l'atmosphère terrestre. Ces particules sont principalement des électrons dont l'énergie cinétique est de l'ordre du keV pour les aurores les plus spectaculaires.

Q1. * Expliquer le caractère lumineux d'une aurore polaire.

Q2. * Pourquoi une aurore boréale (hémisphère nord) apparaît-elle simultanément à une aurore australe (hémisphère sud)? (on s'appuiera sur le document C page 8).

II Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

Afin d'interpréter l'arrivée des particules chargées à l'origine des aurores polaires, on se propose dans la suite de modéliser la dynamique d'un électron dans une zone de champ magnétique stationnaire.

Q3. Dans le référentiel géocentrique (\mathcal{R}) supposé galiléen, on considère tout d'abord un électron de masse m pénétrant en O dans une zone de champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$, avec ($B_0 > 0$). La force gravitationnelle terrestre a-t-elle une influence sur la dynamique de cet électron? On attend un argument qualitatif fondé sur un calcul d'ordre de grandeur.

Q4. Justifier, en utilisant un théorème énergétique, que le mouvement de l'électron plongé dans le champ magnétique \vec{B}_0 est nécessairement uniforme.

Q5. On suppose que la vitesse initiale de la particule s'écrit $\vec{v}_0 = v_{0z} \vec{u}_z$, avec ($v_{0z} > 0$).
Comment se déplace l'électron vis à vis de la direction du champ magnétique?

On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x$, avec ($v_{0x} > 0$).

Q6. Par analyse dimensionnelle, mettre en évidence une pulsation ω_c caractéristique du mouvement de l'électron en fonction de e , m et B et l'évaluer dans le champ magnétique terrestre régnant à l'altitude d'un satellite géostationnaire.

Q7. Par application du principe fondamental de la dynamique, justifier que le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire au vecteur \vec{B}_0 , puis établir les équations couplées suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{eB_0}{m}y + v_{0x} & (1) \\ \dot{y} = \frac{eB_0}{m}x & (2) \end{cases}$$

Q8. En déduire l'équation différentielle vérifiée par y :

$$\ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c v_{0x}$$

Q9. En déduire les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.

Q10. Montrer que la trajectoire de l'électron est circulaire en établissant son équation cartésienne. Représenter la trajectoire et repérer son centre.

Évaluer son rayon R_c .

Un électron accéléré non relativiste perd de l'énergie en rayonnant à un instant donné une puissance électromagnétique $\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} e^{\alpha} c^{\beta} \left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\|^2$.

Q11. Par analyse dimensionnelle, déterminer les valeurs des puissances α et β .

Indication : Pour $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, on pourra utiliser la force de Coulomb pour déterminer sa dimension.

Q12. * En utilisant l'expression obtenue Q10, exprimer la variation de l'énergie cinétique de l'électron dE_c lorsque R_c varie de dR_c .

Établir l'équation différentielle vérifiée par R_c et l'écrire sous la forme $\frac{dR_c}{dt} + \frac{R_c}{\tau} = 0$

Q13. En déduire l'expression de la fonction $R_c(t)$ et établir que le temps caractéristique τ mis en évidence s'écrit $\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 B_0}{e\omega_c^3}$.

L'évaluer et commenter.

Q14. On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0z}\vec{u}_z$, avec ($v_{0x} > 0$ et $v_{0z} > 0$). Comment se déplace l'électron vis à vis du champ magnétique ?

III Ceintures de Van Allen

La Terre est entourée d'une zone où des particules de haute énergie cinétique, typiquement de quelques 100 MeV au GeV, sont piégées par le champ magnétique. Ces particules sont réparties dans des ceintures autour du plan équatorial dites ceintures de Van Allen ou ceintures de radiation. Ces ceintures sont très stables et contrairement aux autres éléments de la magnétosphère, elles sont peu sensibles aux orages, sous-orages et autres reconfigurations de la magnétosphère. De ce fait, les particules s'en échappent difficilement.

Q15. Évaluer la vitesse typique d'un électron dans ces ceintures. La dynamique d'un tel électron peut-elle se déduire des résultats précédents ?

Problème n°3 Molécule de monoxyde de carbone (~ 45 min)

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles m_C pour l'atome de carbone et m pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera que **l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe (Ox)**.

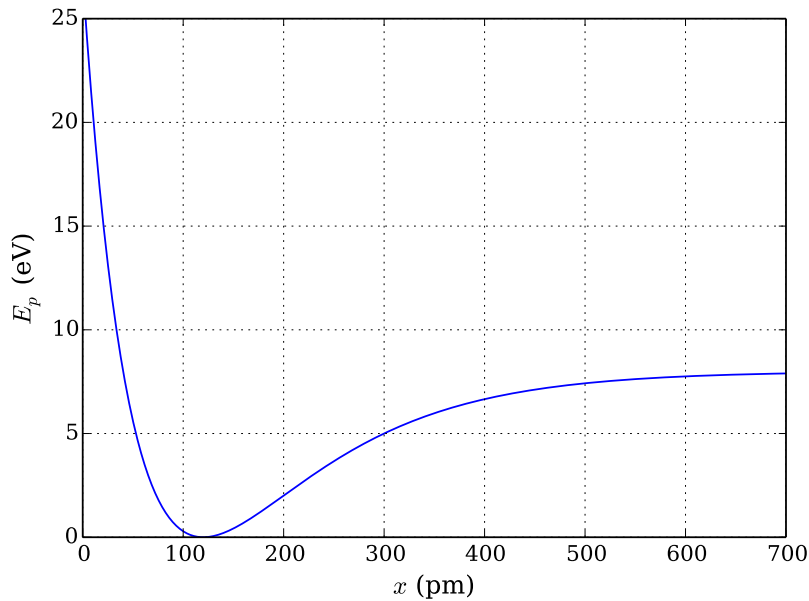
L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle.

L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_0 \left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)^2$$

où x est la distance des noyaux des deux atomes et où \mathcal{E}_0 , β et x_0 sont des constantes positives.

On donne le graphe de $\mathcal{E}_p(x)$ ci-contre.



- Q1. Quelle est la dimension de β ?
- Q2. Déterminer la limite de \mathcal{E}_p en l'infini. En déduire, grâce au graphique, la valeur de \mathcal{E}_0 .
- Q3. Déterminer l'expression de $\mathcal{E}_p(x_0)$. En déduire, grâce au graphique, la valeur de x_0 . Que représente la position x_0 ?
- Q4. Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à \mathcal{E}_0 .
- Q5. Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est supérieure à \mathcal{E}_0 .

On s'intéresse au mouvement de vibration de la molécule de CO au voisinage de x_0 .

On pose $\varepsilon = \beta(x - x_0)$.

- Q6. En effectuant un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle d'interaction au voisinage de x_0 (pour $\varepsilon \ll 1$), montrer qu'elle s'écrit $\mathcal{E}_p(x) \approx \mathcal{E}_0 \beta^2 (x - x_0)^2$.
- Q7. Établir l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre en utilisant l'énergie mécanique.
- Q8. En déduire la fréquence des petites oscillations de la molécule de monoxyde de carbone autour de sa position d'équilibre.

Faire l'application numérique, avec $\beta = 8,69 \cdot 10^{-3} \text{ pm}^{-1}$; $M(O) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

ANNEXES

A Données

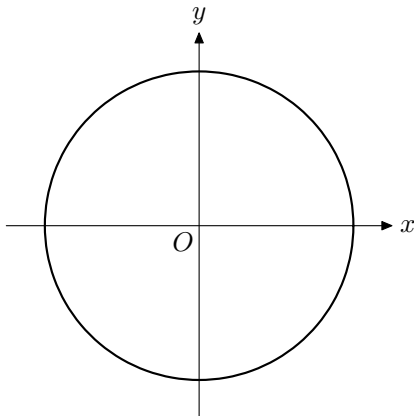
- Constante universelle de la gravitation : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ uSI
- Accélération de la pesanteur : $g = 9,81$ m · s⁻²
- Masse du Soleil $M_S = 2,00 \cdot 10^{30}$ kg
- Demi-grand axe de l'orbite de la Terre $a_T = 150 \cdot 10^6$ km
- Demi-grand axe de l'orbite de Mars $a_M = 228 \cdot 10^6$ km
- Période de révolution de la Terre $T_T = 365$ jours
- Période de révolution de la Mars $T_M = 687$ jours
- Célérité de la lumière dans le vide $c = 3,00 \cdot 10^8$ m · s⁻¹
- Masse de l'électron $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
- Charge électrique $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C
- Permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F · m⁻¹
- Constante d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹
- Champ magnétique terrestre au sol : $B_T \approx 5 \cdot 10^{-5}$ T
- Champ magnétique terrestre à l'altitude d'un satellite géostationnaire : $B_{\text{géo}} \approx 1,7 \cdot 10^{-7}$ T

B Formulaire

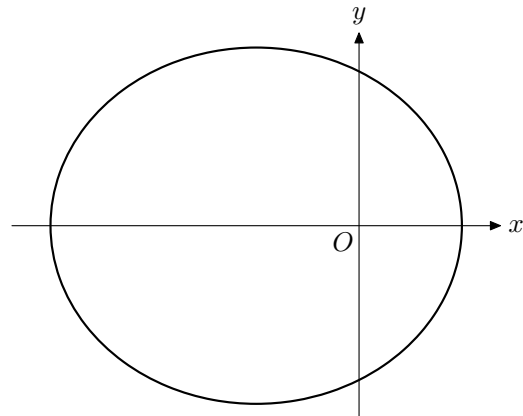
L'équation polaire d'une conique d'axe focal (Ox), de paramètre p et d'excentricité e s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

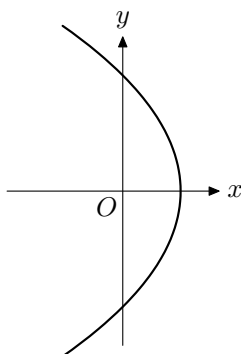
La nature de la courbe dépend de l'excentricité. On distingue 4 cas.



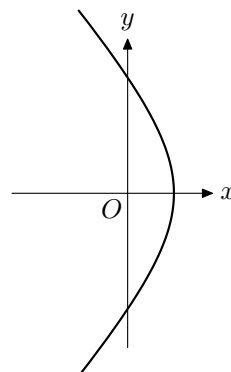
$e = 0$, la courbe est un cercle



$0 < e < 1$, la courbe est une ellipse



$e = 1$, la courbe est une parabole



$e > 1$, la courbe est une hyperbole

C Document : La magnétosphère de la Terre

D'après : Gilbert Pietryk (sous la direction de), *Panorama de la physique, Pour la Science, Belin, 2007.*

La magnétosphère est la dernière enveloppe d'une planète, avant le milieu interplanétaire. Ce milieu est dominé essentiellement par le vent solaire, constitué de protons et d'électrons très rapides. Comme son nom l'indique, la magnétosphère est caractéristique des planètes qui ont un champ magnétique propre. La magnétosphère terrestre est la mieux connue puisqu'elle est la plus facilement accessible et qu'elle est explorée depuis l'ère des projets spatiaux. Pourtant de nombreux mystères subsistent quant à son fonctionnement, en particulier sur la manière dont elle répond aux modifications de l'activité solaire.

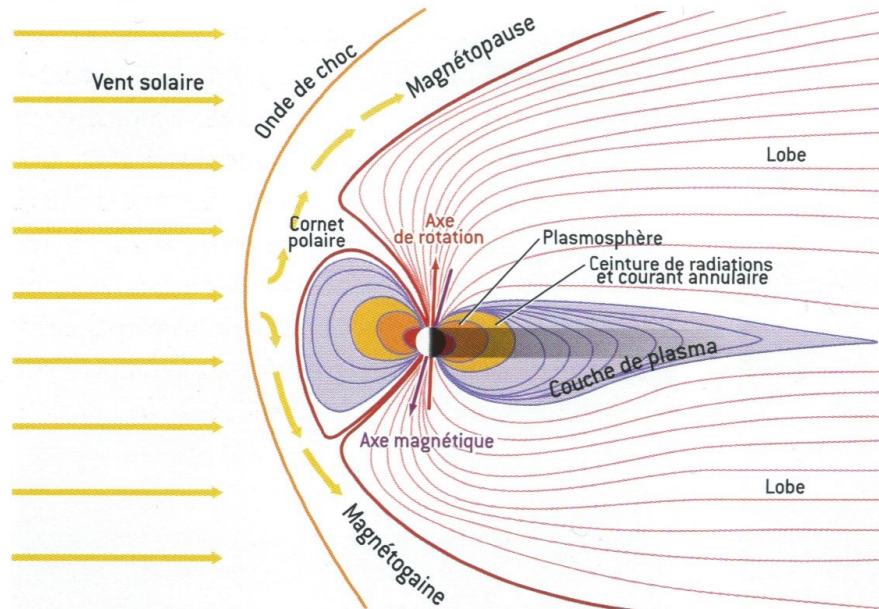


FIGURE 1 – Coupe méridienne de la magnétosphère de la Terre. Le Soleil est loin sur la gauche. Les traits fins symbolisent les lignes de champ magnétique, les flèches jaunes le mouvement du plasma.

L'avant de la magnétosphère se caractérise par une première frontière nette, le choc. Ce choc est dû au fait que le vent solaire a une vitesse d'ensemble supérieure à toutes les vitesses possibles de propagation des ondes dans le milieu. Derrière le choc se trouve la magnétogaine, région où le plasma du vent solaire est ralenti, chauffé et où l'on observe une turbulence importante. Le champ magnétique est encore celui du vent solaire un peu modifié par la traversée du choc. Cette région intermédiaire est suivie d'une autre frontière nette, la magnétopause. Cette frontière sépare la zone d'influence du champ magnétique terrestre de celle du vent solaire. Cette frontière est une discontinuité mince comme un choc mais ce n'est pas un choc, c'est une frontière qui isole vraiment les deux milieux, l'énorme majorité des particules du vent solaire restant à l'extérieur. On constate donc que ce qui fait obstacle au vent solaire ce n'est pas la planète elle-même, ni son atmosphère, mais son champ magnétique. Le contournement du vent solaire donne à la magnétosphère sa forme caractéristique, avec une queue allongée dans la direction opposée au Soleil et deux immenses « lobes » presque totalement vides. L'ionosphère est une région importante dans la dynamique de la magnétosphère (bien qu'invisible à l'échelle de la figure). Elle résulte de l'ionisation des couches supérieures de l'atmosphère par le rayonnement UV du Soleil qui la rend conductrice, et lui fait jouer un rôle dans la fermeture des courants magnétosphériques.

La magnétosphère et son intense activité électromagnétique ne sont pas visibles du sol sauf dans les régions polaires où elles peuvent se manifester de façon très spectaculaire. Le champ magnétique terrestre est à peu près celui d'un dipôle dont l'axe passe dans les régions polaires. Les lignes de champ qui viennent des régions éloignées de la Terre plongent donc dans l'atmosphère dans les régions polaires. Comme dans la magnétosphère le plasma est peu dense, il n'y a pas de collisions et les particules chargées restent liées aux lignes de champ. Quand une reconfiguration magnétique intervient (ce qu'on appelle un sous-orage magnétique), les particules accélérées dans la queue de la magnétosphère arrivent le long du champ sur les couches denses de l'atmosphère et produisent des aurores. Dans le même temps, ces électrons accélérés émettent un rayonnement radio dont la longueur d'onde est de l'ordre du kilomètre et qui s'échappe de la magnétosphère par les pôles.



FIGURE 2 – Aurore boréale vue du sol sur la Terre. La Lune, visible à côté de l'aurora, donne une idée de la luminosité (Centre d'étude spatiale des rayonnements ©CNRS Photothèque/V. Génot).

D DOCUMENT RÉPONSE À RENDRE

NOM : _____ Prénom : _____

Questions Q7 et Q10

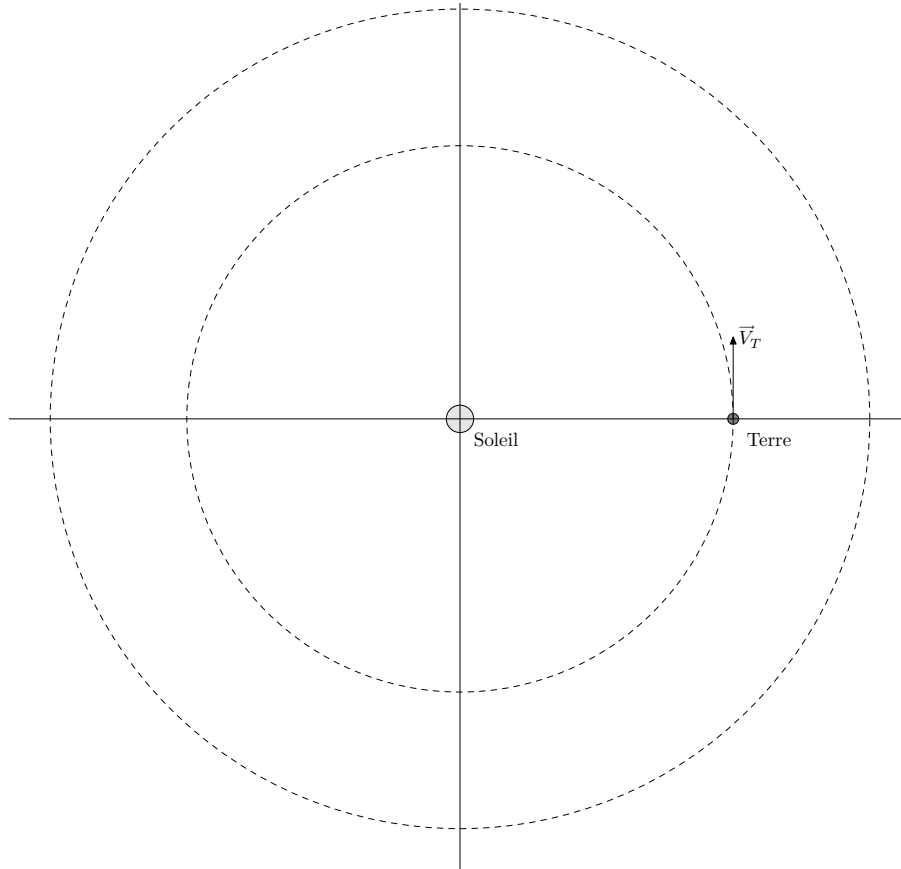


Figure A

Questions Q14 et Q16

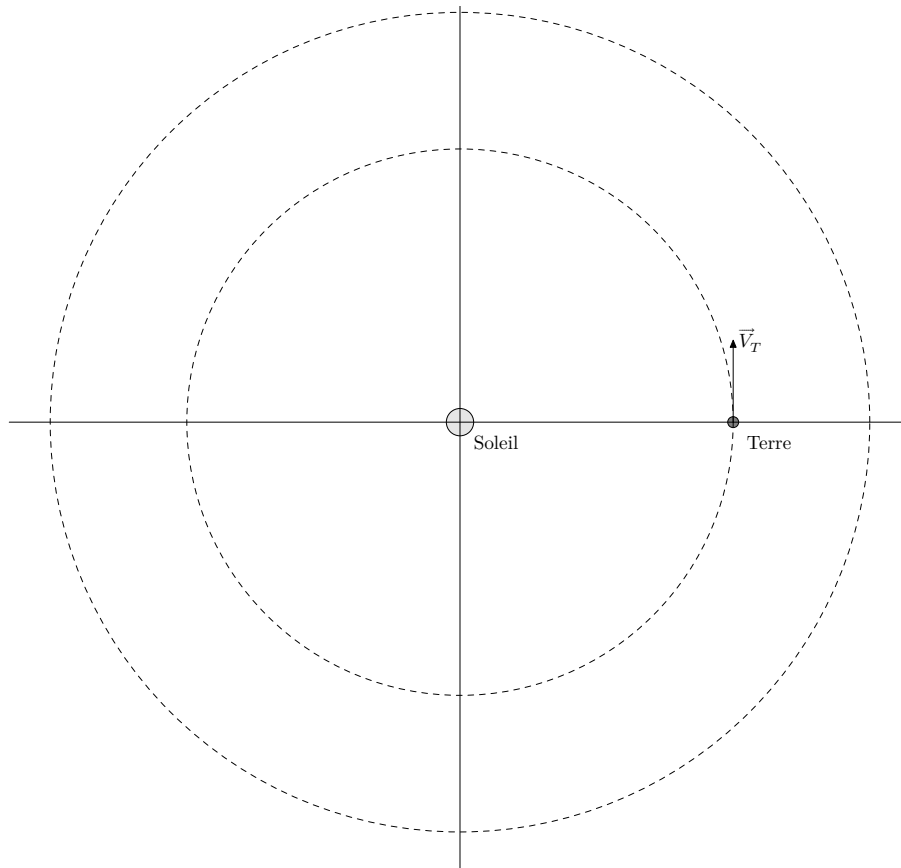


Figure B