Lundi 24 avril 2023

Devoir Surveillé n°9 (2) — *Durée : 4 heures*

La calculatrice est autorisée.

Chapitres concernés

— Mécanique : Mouvement d'un solide

— Thermodynamique : Description d'un système thermodynamique ; Premier principe

Consignes à respecter

- **Lire la totalité de l'énoncé** et commencer par les exercices les plus abordables.
- Présentation de la copie :
  - Prendre une **nouvelle copie double pour chaque exercice**.
  - Tirer un **trait horizontal** à travers toute la copie **entre chaque question**.
  - Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
  - **Numéroter les pages** sous la forme x/nombre total de pages.
- Rédaction :
  - Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
  - **Justifier** toutes vos réponses.
  - Applications numériques : nombre de **chiffres significatifs adapté** et avec une **unité**.

Ce sujet comporte 4 problèmes totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
L'énoncé est constitué de 8 pages.

Les copies de concours sont numérisées en couleur, pour cela, vous devez respecter les consignes suivantes :

— **Composer à l'encre BLEUE ou NOIRE NON EFFAÇABLE. Pas de stylo plume ni de stylos « friction ».**

— **Si vous souhaitez réaliser des schémas ou mettre des résultats en évidence, vous pouvez utiliser des couleurs, SAUF LE VERT ET LE TURQUOISE. Vous pouvez également utiliser des feutres ou des surligneurs.**

— **Ne pas utiliser de correcteur (tipex par exemple).**

Données

- Masse volumique de l'eau liquide : $\rho_\ell = 1,0.10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}
- Capacité thermique massique de l'eau liquide $c_\ell = 4,18.10^3$ J $\cdot$ K^{-1} $\cdot$ mol^{-1}
- Masse molaire de l'air $M_a = 28,9$ g $\cdot$ mol^{-1}
- Masse molaire de l'eau $M_e = 18$ g $\cdot$ mol^{-1}
- Accélération de la pesanteur : $g = 9,81$ m $\cdot$ s^{-2}
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314$ J $\cdot$ K^{-1} $\cdot$ mol^{-1}

Problème n°1 Gaz parfait ($\sim$ 1 heure)

I Risque d'hypoxie

Cette partie est extrait d'un sujet portant sur l'exploration des très grandes profondeurs à l'aide de sous-marins autonomes et s'attache à discuter des contraintes de sécurité liées à ces expéditions. Il reprend en particulier les données disponibles sur l'expédition menée par le réalisateur James Cameron dans la fosse des Mariannes, fosse océanique la plus profonde connue à ce jour, et son sous-marin nommé Deepsea Challenger.

La puissance électrique disponible assure, entre autres, le fonctionnement du système de contrôle de l'atmosphère de la capsule (assimilée à une sphère de diamètre intérieur $D = 1,09$ m) pendant plus de 50 heures. **Ce système permet de maintenir une composition de l'air intérieur de l'habitacle correspondant à celle de l'atmosphère terrestre au niveau de la mer**. On s'intéresse à la durée de survie du pilote au fond de l'océan en cas de panne de ce système. Le dimensionnement des systèmes de survie en cas d'incidents divers s'appuie sur les données physiologiques moyennes d'un adulte :

- pression partielle en dioxygène pour que l'air soit respirable $P_{O_2} > P_{O_2\ell} = 8,0 \times 10^3$ Pa ;
- volume moyen d'air inspiré au repos $V_p = 0,50$ L ;
- fréquence respiratoire au repos $f = 0,25$ Hz.

On considère que, lors d'une inspiration, un être humain inspire toujours le même volume V_p d'air dont la composition est celle de l'air ambiant dans lequel il se trouve. L'étude d'un cycle respiratoire montre que **seul un quart du dioxygène inspiré est effectivement consommé par les poumons**. On admettra que **la quantité de matière de dioxyde de carbone exhalée est égale à la quantité de matière de dioxygène consommée par les poumons**.

Q1. Quelle est la composition moyenne de l'air présent dans l'atmosphère terrestre au niveau de la mer ?

On suppose que le système de contrôle de l'atmosphère cesse de fonctionner et on note n_i et $P_{O_2 i}$ respectivement la quantité de matière de dioxygène présente dans l'habitacle et la pression partielle en dioxygène après la i-ème respiration après l'arrêt de ce système.

Q2. En explicitant les hypothèses utilisées, établir la relation $n_{i+1} = n_i \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)$, où V est le volume libre dans l'habitacle. En déduire une relation entre $P_{O_2 i+1}$ et $P_{O_2 i}$.

En déduire que $P_{O_2 i} = P_{O_2 0} \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)^i$.

Q3. En déduire le nombre d'inspirations que peut faire le pilote, puis sa durée de vie sans apport extérieur de dioxygène.

II Énergie interne

Q4. Définir l'énergie interne et la capacité thermique à volume constant.

Q5. Quelle est la propriété de l'énergie interne molaire d'un gaz parfait ? Comment s'exprime la variation de l'énergie interne ?

III Premier principe

Q6. Donner l'expression du travail des forces de pression reçu par un système dont le volume passe de V_i à V_f, soumis à une pression extérieure P_{ext}. Comment peut-on l'écrire si la transformation est quasi-statique ?

Q7. Énoncé le premier principe sous sa forme fréquente. On définira précisément chaque terme intervenant dedans.

On étudie la détente isotherme de n mole d'un gaz parfait à la température T_0, qui le fait passer d'un volume V_0 à un volume $2V_0$.

Q8. Établir les expressions du travail des forces de pression et du transfert thermique reçus par le gaz.

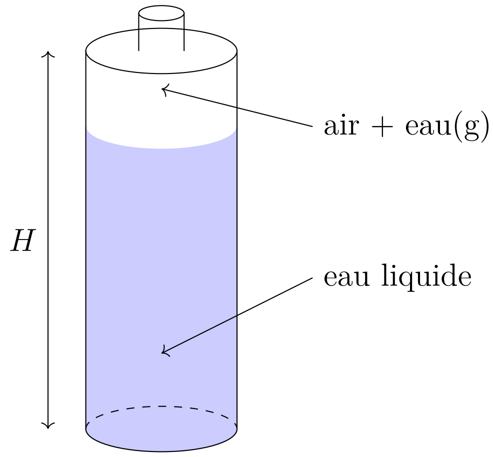
Quels sont leur signe ? Commenter physiquement.

Problème n°2 La physique dans la cuisine ($\sim$ 1h15)

La chimie c'est de la cuisine, mais il y a tant de physique dans la cuisine également !

I Évaporation dans une bouteille d'eau

On considère une gourde en plastique assimilée à un cylindre de rayon $r = 3,25$ cm et de hauteur $H = 17$ cm.
Vous la remplissez d'eau liquide à 80%, les 20% restant étant de l'air humide de la cuisine de température $T_c = 20$ °C, dont l'humidité relative est $HR = 40\%$.
Vous fermez la bouteille hermétiquement. On suppose que la température reste constante égale à T_c.
L'air et la vapeur d'eau sont assimilés à des gaz parfaits.



On rappelle la définition de l'humidité relative (ou degré hygrométrique) :

$$HR = \frac{P_{\text{eau}}}{P_{\text{sat}}(T)}$$

où P_{eau} est la pression partielle en eau, et $P_{\text{sat}}(T)$ la pression de vapeur saturante de l'eau à la température T.

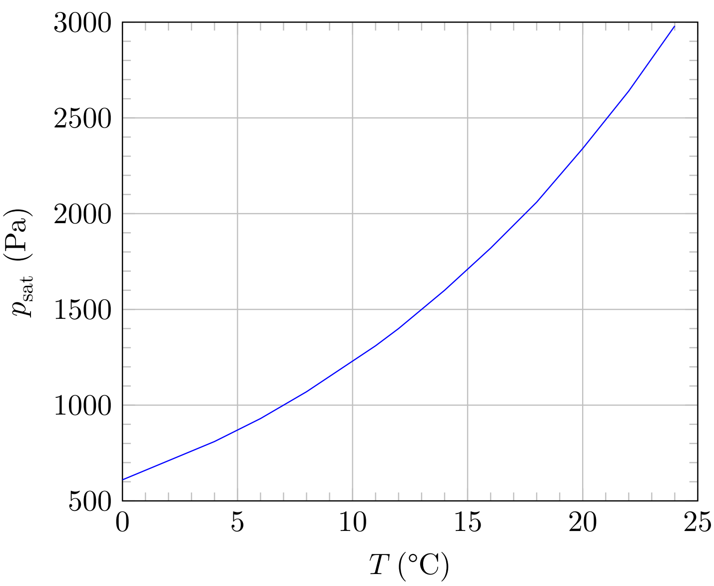


FIGURE 1 – Pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température

Q9. Quel phénomène va-t-il se produire dans la gourde à l'interface eau liquide / air ? Pourquoi ?

Q10. Exprimer la masse de vapeur d'eau m_v^i initialement présente dans l'atmosphère au-dessus en fonction de M_e, P_{eau}^i, H, r, R, T_c.

Q11. Quelle masse d'eau m_v^f sera présente dans l'atmosphère quand le phénomène identifié précédemment sera terminé ? On supposera pour cela que la quantité d'eau liquide qui s'évapore est faible par rapport à la quantité initiale, et qu'on peut négliger la variation du volume d'eau liquide.

Q12. Déterminez la variation de la hauteur d'eau que le phénomène engendre dans la gourde. L'hypothèse effectuée à la question précédente était-elle légitime ?

II Un café tristement abandonné dans une cuisine (1^{er} principe)

Vous vous servez une tasse de café de $V = 20$ cL, de température $T_0 = 60$ °C en vous levant, l'histoire de vous réveiller avant d'affronter les 4 heures de DS de physique. Malheureusement, vous oubliez de le boire. Il est alors abandonné toute la journée, dans la cuisine de température $T_c = 20$ °C.
On suppose que le café dans la tasse est un système fermé, et la transformation monotherme et isochore.

Q13. Commenter physiquement les hypothèses faites sur la transformation subie par le café.

Q14. Que vaut la température finale du café ?

Q15. Établir l'expression du transfert thermique reçu par le café au cours de la transformation en fonction de c_ℓ, T_0, T_c, ρ_ℓ et V.
Faire l'application numérique. Commenter physiquement le signe du transfert thermique.

III Thé buvable immédiatement (1^{er} principe)

Vous souhaitez boire un thé le matin, vous faites bouillir de l'eau à la température $T_1 = 100$ °C et vous en versez un volume $V_1 = 20$ cL dans un mug à double paroi. Cependant, en retard pour votre DS de physique, il vous faut ajouter de l'eau pour le rendre buvable immédiatement, soit à la température $T_F = 60$ °C. Vous ajoutez pour cela un volume V_2 d'eau froide du robinet à $T_2 = 10$ °C.

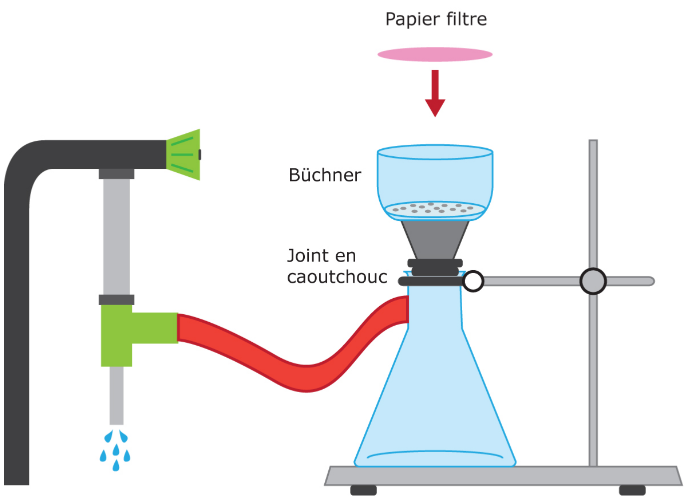
Q16. Définir le système et décrire précisément la transformation, en faisant des hypothèses raisonnables (on pourra s'inspirer de la partie précédente). On justifiera notamment pourquoi la transformation peut être supposée adiabatique.

Q17. En justifiant parfaitement, établir la relation entre V_1, V_2, T_F, T_1 et T_2.

Q18. En déduire le volume d'eau froide à ajouter pour pouvoir boire votre thé immédiatement.

IV Filtration sur Büchner

Petit tour en chimie ! Vous avez déjà utilisé un Büchner pour effectuer une filtration sous vide.
On constate lors de son utilisation que l'eau, issue de la filtration qui se trouve dans l'erlenmeyer, bout.



Q19. Pourquoi observe-t-on cela ?

Problème n°3 Utilisation de l'énergie houlomotrice (∼ 45 min)

Ce problème étudie différents aspects de la production électrique à partir de l'énergie houlomotrice.
On considère un système à corps oscillant avec une partie fixe au fond de l'eau et une partie mobile, comme par exemple le dispositif Oyster dispositif dont la partie supérieure dépasse légèrement de l'eau, qui est testé au large de l'Écosse, ou comme le dispositif WaveRoller, dispositif complètement immergé, développé par une société finlandaise et qui est testé au large du Portugal.

FIGURE 2 – Dispositifs Oyster (à gauche) et WaveRoller (à droite).

On modélise ce dispositif par un pendule pesant composé d'un solide S en rotation autour de l'axe Oy et complètement immergé dans l'eau. Le pendule est fixé au sol (au fond de la mer) par un dispositif non représenté sur le schéma. Le point O est donc fixe par rapport au sol. Les mouvements ont lieu dans le plan vertical (xOz). Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ forment une base orthonormée directe.

On note :

- m la masse et V le volume du solide S ;
- J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oy ;
- d la distance entre l'axe de rotation et le centre de gravité du solide $d = OG$;
- ρ_e la masse volumique de l'eau ;
- Ω la vitesse angulaire de rotation du pendule.

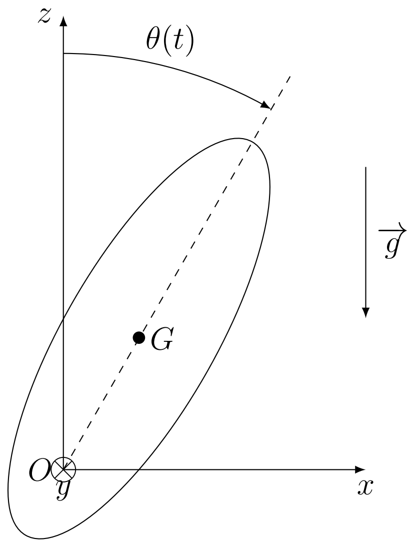


FIGURE 3 – Pendule pesant, notations

On suppose que :

- le référentiel terrestre est galiléen ;
- le centre de poussée (point d'application de la poussée d'Archimède) pour le solide S est ici confondu avec son centre de gravité G ;
- il existe un couple résistant exercé au niveau de l'axe de rotation du pendule de la forme : $\overrightarrow{C} = -\alpha\dot{\theta}\overrightarrow{u_y}$;
- la houle exerce une force de la forme $\overrightarrow{F} = \beta\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$ en G.

Q20. En raisonnant de manière qualitative sur les forces, déterminer la condition sur ρ_e, m et V pour que, en absence de houle, la position d'équilibre stable du pendule corresponde à $\theta = 0$.

Q21. Déterminer les moments des différentes forces s'exerçant sur le solide S par rapport à l'axe Oy.

Q22. Établir l'équation du mouvement du solide S, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par θ.

Q23. On se place dans l'approximation des petits angles. Linéariser alors l'équation différentielle précédente. On mettra l'équation sous la forme

$$\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta(t) = f(t)$$

et on précisera les expressions des différents termes λ, ω_0 et $f(t)$.

Q24. On se place en régime sinusoïdal forcé. On note $\underline{\theta} = \theta_0(\omega)e^{j(\omega t+\varphi)}$ et $\theta = Re(\underline{\theta})$. Déterminer l'expression de $\theta_0(\omega) = |\underline{\theta}|$.

Q25. La puissance récupérée est proportionnelle à $\dot{\theta}^2$: on la note $\mathscr{P}_r(t) = \gamma\dot{\theta}^2$. Établir l'expression de la puissance moyenne $\mathscr{P}_m$ récupérée en fonction de ω.

Indications (j'espère que vous mesurez la chance que vous avez ! ces indications n'étaient pas présentes dans le sujet initial) :

— Pour que cela soit plus simple pour la suite, arrangez-vous pour que ω n'intervienne qu'au dénominateur.

— On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f périodique de période T est définie par $< y >= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

— On rappelle que $\langle\cos^2(x)\rangle = \langle\sin^2(x)\rangle = \dfrac{1}{2}$

Q26. Tracer l'allure de $\mathscr{P}_m$ en fonction de ω. Pour quelle pulsation y a-t-il résonance ?

Q27. Calculer la pulsation propre ω_0 puis la période propre T_0. Données : accélération de la pesanteur $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $d = 10$ m, $V = 1000\ \mathrm{m^3}$, $m = 300$ t et on prendra $J \approx md^2$.

Problème n°4 Mesures avec des pendules ($\sim$ 1 heure)

I Mesure du champ de pesanteur avec un pendule pesant

L'instrument de mesure du champ de pesanteur est un gravimètre. Les gravimètres relatifs ne permettent pas d'avoir une valeur précise de la pesanteur, mais ils sont très sensibles à ses variations. Ainsi, on peut cartographier avec précision la différence de pesanteur par rapport à un point choisi comme référence. Les gravimètres à ressort (une masse connue tire plus ou moins sur un ressort dont l'allongement est mesuré) ont une précision allant jusqu'à 1×10^{-8} m · s^{-2}. D'autres gravimètres, à supra-conducteur (une masse en métal est mise en lévitation par un champ magnétique), sont encore plus précis, de l'ordre de 1×10^{-9} m · s^{-2}.

Les gravimètres dits absolus permettent la mesure directe de l'intensité du champ de pesanteur. Dans les débuts de la géodésie, on a longtemps utilisé des pendules : pendule de Kater, pendule de Repsold, pendule inversé de Holweck-Lejay ...

On étudie ici un éventuel dispositif de mesure plus rudimentaire, basé sur un **pendule constitué d'une tige pouvant tourner autour d'un axe Δ incliné d'un angle α constant par rapport à la verticale** (figure 4). L'**axe Δ est situé dans le plan** (Oyz).

Le fait de choisir un angle α faible fait que la période d'oscillation de la tige sera grande. Les variations de la période d'oscillation dues à des variations du champ de pesanteur seront alors plus faciles à mesurer.

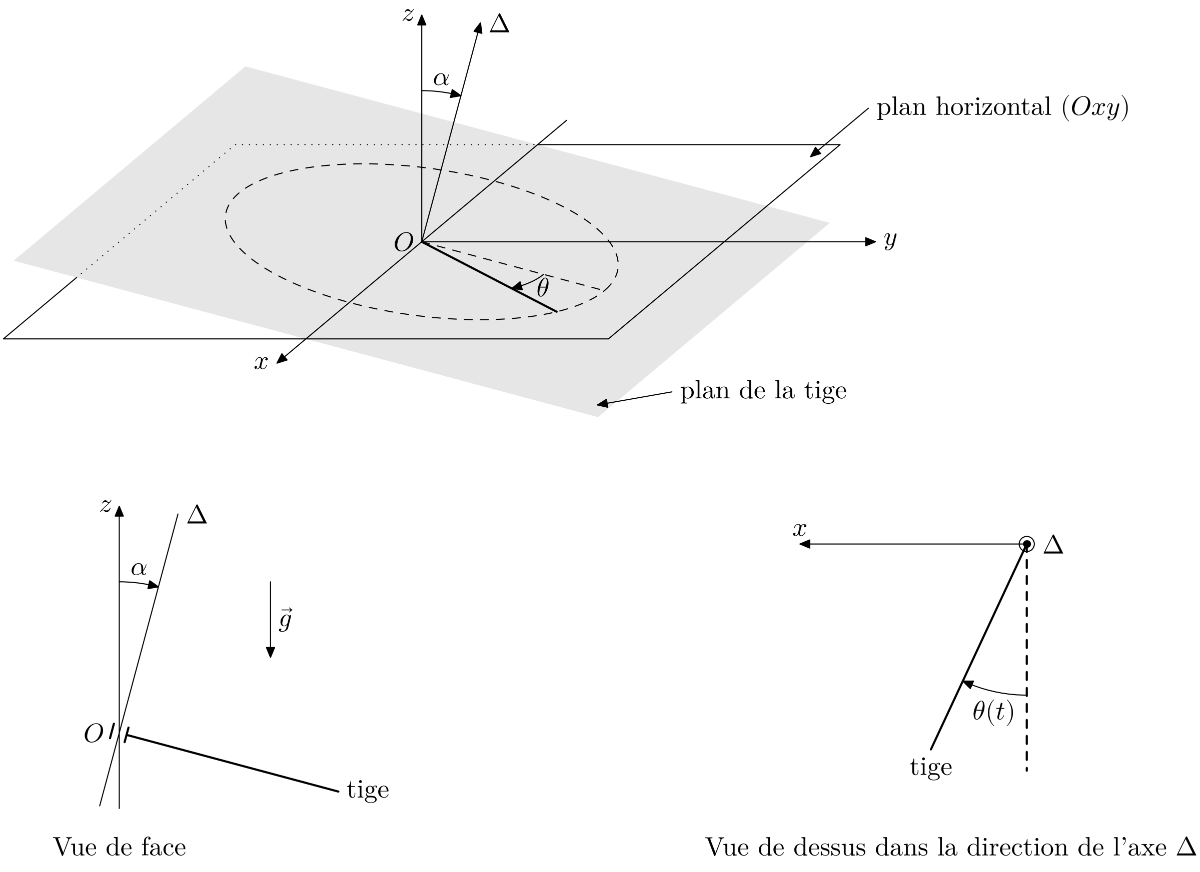


FIGURE 4 – Pendule pesant

On note $\theta(t)$ l'angle de rotation de la tige par rapport à sa position d'équilibre, c'est-à-dire la position pour laquelle le centre d'inertie de la tige a une altitude z minimale.

On adopte les hypothèses suivantes :

— le référentiel d'étude est supposé galiléen ;

— la liaison pivot au point d'attache O entre la tige et l'axe est supposée parfaite ;

— les frottements sont négligés.

La tige est supposée homogène, de longueur 2ℓ et de masse m. Elle a pour moment d'inertie $J = \dfrac{4}{3}m\ell^2$ par rapport à l'axe Δ.

Q28. Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_p de la tige en fonction de m, g, ℓ, α et θ. La réponse devra être parfaitement justifiée et s'appuyer sur des schémas clairs.

Q29. En utilisant une méthode énergétique, montrer que $\theta(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{4}\frac{g}{\ell}\sin\alpha\sin\theta(t) = 0$$

On se limite à partir de maintenant à des oscillations de faible amplitude. On note T_0 la période des oscillations de la même tige mais dans un plan vertical, soit pour $\alpha = 90°$.

Q30. Exprimer la période T des oscillations de tige en fonction de α et de T_0. Commenter le choix de α.

On définit la sensibilité du dispositif de mesure par la grandeur

$$S = \left|\frac{\Delta T}{\Delta g}\right|$$

avec ΔT la variation de la période T engendrée par une variation Δg du champ de pesanteur. On fait l'hypothèse que $\Delta T \ll T$ et que $\Delta g \ll g$.

Q31. Exprimer S en fonction de ℓ, α et g.

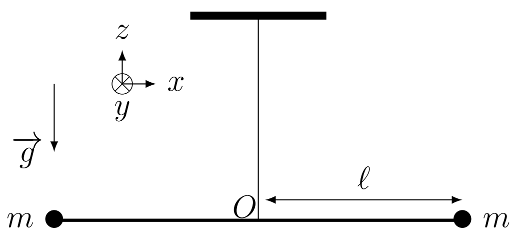
On cherche à mettre en évidence une anomalie gravitationnelle $\Delta g = 1 \times 10^{-4}$ m · s^{-2}.

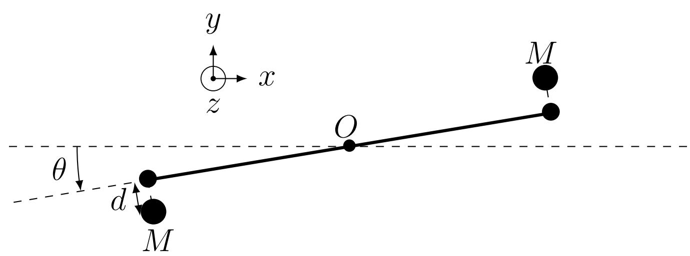
Q32. De quel angle α en degrés doit-on incliner l'axe de rotation Δ si l'on souhaite que cela corresponde à une variation $\Delta T = 1$ ms avec une tige de longueur égale à 1 m ? Commenter.

II Mesure de la constante universelle de gravitation

La faible intensité de la force de gravitation par rapport aux autres forces rend sa mesure difficile. En 1798, Cavendish réalise une expérience utilisant un pendule de torsion dont les résultats seront réinterprétés un siècle plus tard comme la première détermination de G. La précision relative de sa mesure est d'environ 1%, ce qui est remarquable pour l'époque.

La figure ci-dessous illustre le principe de l'expérience de Cavendish. Deux particules de masse m aux extrémités d'une tige de longueur ℓ, un fil de torsion relie le centre de la tige à un point fixe du laboratoire, réalisant ainsi un pendule de torsion. En approchant deux sphères de masse M à une distance d de chacune des extrémités du pendule, on observe une déviation angulaire dont la mesure permet de déterminer G.





Dans la suite, on note θ la déviation angulaire du pendule à sa position d'équilibre. On note k la raideur angulaire du fil de torsion : le moment du couple de rappel est $-k\theta\overrightarrow{e_z}$. Les sphères de masse M et les particules de masse m sont considérées comme des particules ponctuelles.

$k = 5,0.10^{-7}$ N · m · rad^{-1}	$\ell = 10$ cm	$m = 50$ g
$\theta = 1,75.10^{-3}$ rad	$d = 15$ cm	$M = 30$ kg

Q33. Exprimer la norme de la force d'attraction gravitationnelle exercée par une masse M sur la masse m la plus proche.

Q34. Exprimer le moment résultant par rapport à l'axe (Oz) des forces d'attraction gravitationnelle.

Q35. En déduire une relation entre k, θ, G, m, M, d et ℓ.

Q36. En déduire la valeur de G mesurée par Cavendish.