Lundi 24 avril 2023

Devoir Surveillé n°9 (2) – *Corrigé*

Chapitres concernés

- Mécanique : Mouvement d'un solide
- Thermodynamique : Description d'un système thermodynamique ; Premier principe

Problème n°1 Gaz parfait ($\sim$ 1 heure)

I Risque d'hypoxie

Le dimensionnement des systèmes de survie en cas d'incidents divers s'appuie sur les données physiologiques moyennes d'un adulte :

- pression partielle en dioxygène pour que l'air soit respirable $P_{O_2} > P_{O_2\ell} = 8,0 \times 10^3$ Pa ;
- volume moyen d'air inspiré au repos $V_p = 0,50$ L ;
- fréquence respiratoire au repos $f = 0,25$ Hz.

On considère que, lors d'une inspiration, un être humain inspire toujours le même volume V_p d'air dont la composition est celle de l'air ambiant dans lequel il se trouve. L'étude d'un cycle respiratoire montre que **seul un quart du dioxygène inspiré est effectivement consommé par les poumons**. On admettra que **la quantité de matière de dioxyde de carbone exhalée est égale à la quantité de matière de dioxygène consommée par les poumons**.

R1. Quelle est la composition moyenne de l'air présent dans l'atmosphère terrestre au niveau de la mer ?

Solution: L'air est composé de 80% de diazote et 20% de dioxygène

On suppose que le système de contrôle de l'atmosphère cesse de fonctionner et on note n_i et $P_{O_2 i}$ respectivement la quantité de matière de dioxygène présente dans l'habitacle et la pression partielle en dioxygène après la i-ème respiration après l'arrêt de ce système.

R2. En explicitant les hypothèses utilisées, établir la relation $n_{i+1} = n_i \left(1 - \dfrac{V_p}{4V}\right)$, où V est le volume libre dans l'habitacle. En déduire une relation entre $P_{O_2 i+1}$ et $P_{O_2 i}$.

En déduire que $P_{O_2 i} = P_{O_2 0}\left(1 - \dfrac{V_p}{4V}\right)^i$.

Solution: On suppose que l'air se comporte comme un gaz parfait, que la température et la concentration de dioxygène sont uniformes dans l'habitacle, et que la température est également uniforme. L'énoncé indique en outre que l'oxygène utilisé est remplacé par la même quantité de dioxyde de carbone, donc le nombre de moles gazeuses dans l'habitacle est constante, de même à température et volume constants que la pression.

Après la i-ème inspiration, le volume V de l'habitacle contient n_i moles de dioxygène, donc la quantité de dioxygène inspiré lors de la $(i+1)$-ème inspiration vaut

$$n_{\text{inspiré}} = n_i \frac{V_p}{V}$$

où V_p est le volume inspiré. Seul un quart de cette quantité est utilisé par les poumons et transformé en dioxyde de carbone, le reste étant exhalé, donc la quantité de dioxygène restant dans l'habitacle après cette respiration vaut, en l'absence de production de dioxygène lors d'une panne du système de production :

$$n_{i+1} = n_i - \frac{n_{\text{inspiré}}}{4} = n_i\left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)$$

Soit en appliquant la loi du gaz parfait, dans l'hypothèse d'une température constante dans l'habitacle

$$P_{O_2,i+1} = \frac{n_{i+1}RT}{V} = n_i\left(1-\frac{V_p}{4V}\right)\frac{RT}{V} = P_{O_2,i}\left(1-\frac{V_p}{4V}\right)$$

Les pressions partielles $P_{O_2,i}$ forment donc une suite géométrique de raison $r = \left(1-\frac{V_p}{4V}\right) < 1$, d'où

$$P_{O_2,i} = P_{O_20}\left(1-\frac{V_p}{4V}\right)^i$$

R3. En déduire le nombre d'inspirations que peut faire le pilote, puis sa durée de vie sans apport extérieur de dioxygène.

Solution: Le nombre n d'inspirations possibles d'air respirable vérifie $P_{O_2,n} \leq P_{O_2\ell}$, soit

$$P_{O_20}\left(1-\frac{V_p}{4V}\right)^n \leq P_{O_2\ell}$$

En passant au logarithme on obtient la relation

$$n\ln\left(1-\frac{V_p}{4V}\right) \leq \ln\left(\frac{P_{O_2\ell}}{P_{O_20}}\right)$$

Le nombre maximal de respirations vaut

$$\boxed{n_{\max} = \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{P_{O_2\ell}}{P_{O_20}}\right)}{\ln\left(1-\frac{V_p}{4V}\right)} \right\rfloor}$$

On calcule la pression partielle de dioxygène à la surface libre $P_{O_20} = x_{O_20}P_0 = 0,2P_0 = 2.10^4$ bar.

Le volume de la partie habitable assimilée à une sphère de diamètre $D = 1,09$ m, $V = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi D^3}{6} = 0,678\ \text{m}^3$

Enfin :

$$n_{\max} = \left\lfloor \frac{\ln(8,0.10^3/2.10^4)}{\ln(1-0,5.10^{-3}/(4\times 0,678))} \right\rfloor = 4,97.10^3$$

En supposant que la fréquence de la respiration reste constante, même quand la quantité d'oxygène diminue, la durée maximale de respiration vaut

$$\boxed{\tau = \frac{n_{\max}}{f} = \frac{4,97.10^3}{0,25} \approx 2,0.10^4\ \text{s} = 5,5\ \text{h}}$$

Cette valeur donne une estimation du temps de survie en cas de panne du système de contrôle de l'atmosphère. Ce temps présente sans doute des variations liées à la physiologie et à la psychologie du pilote (modification de la respiration par rapport au signai d'alarme physiologique associé à la concentration de monoxyde de carbone, modification de l'utilisation du dioxygène par l'organisme en cas d'hypoxie, ...)

II Énergie interne

R4. Définir l'énergie interne et la capacité thermique à volume constant.

Solution: L'énergie interne est la somme des énergies cinétiques à l'échelle microscopique et des énergies potentielles d'interaction.

La capacité thermique à volume constant est définie par $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$. Autrement dit, au cours d'une transformation infinitésimale isochore $\mathrm{d}U = C_V \mathrm{d}T$.

R5. Quelle est la propriété de l'énergie interne molaire d'un gaz parfait ? Comment s'exprime la variation de l'énergie interne ?

Solution: L'énergie interne molaire d'un gaz parfait ne dépend que de la température.

$\Delta U = \int_{T_i}^{T_f} nC_{V,m}\mathrm{d}T = nC_{V,m}(T_f - T_i)$ (pour un système fermé dont $C_{V,m}$ est indépendante de la température sur l'intervalle $[T_i, T_f]$.

III Premier principe

R6. Donner l'expression du travail des forces de pression reçu par un système dont le volume passe de V_i à V_f, soumis à une pression extérieure P_{ext}. Comment peut-on l'écrire si la transformation est quasi-statique ?

Solution: Travail des forces de pression : $W_P = \int_{V_i}^{V_f} -P_{\text{ext}}\mathrm{d}V$

Au cours d'une transformation quasi-statique, le système est en équilibre à chaque instant avec le milieu extérieur, donc $P_{\text{ext}} = P$, alors $W_P = \int_{V_i}^{V_f} -P\mathrm{d}V$

R7. Énoncé le premier principe sous sa forme fréquente. On définira précisément chaque terme intervenant dedans.

Solution: La variation de l'énergie interne d'un système FERMÉ est égale à la somme des travaux W et transferts thermiques Q algébriquement reçus : $\Delta U = W + Q$

On étudie la détente isotherme de n mole d'un gaz parfait à la température T_0, qui le fait passer d'un volume V_0 à un volume $2V_0$.

R8. Établir les expressions du travail des forces de pression et du transfert thermique reçus par le gaz. Quels sont leur signe ? Commenter physiquement.

Solution:

Système : $\{n$ moles de gaz parfait $\}$ $\begin{array}{c} EI \\ P_i \\ V_0 \\ T_0 \end{array} \xrightarrow{\text{isotherme : } T=T_0=\text{cste}} \begin{array}{c} EF \\ P_f \\ 2V_0 \\ T_0 \end{array}$

La température n'évolue pas, donc l'énergie interne du gaz parfait est constante, donc $\boxed{\Delta U = 0}$

Travail des forces de pression : $\mathcal{W}_P = \int_{V_i}^{V_f} -P_{\text{ext}}\mathrm{d}V$

Or la transformation est isotherme, pour cela elle est nécessairement quasi-statique, donc $P_{\text{ext}} = P$

$\mathcal{W}_P = \int_{V_I}^{V_F} -P(V)\mathrm{d}V$

Or le système est un gaz parfait, donc $P = \frac{nRT_0}{V}$

Ainsi $W_P = \int_{V_i}^{V_f} -\frac{nRT_0}{V} \mathrm{d}V$
Le système étant fermé, n est constante, R est la constante des gaz parfaits donc c'est une constante, et la température T_0 du système est une constante au cours d'une transformation isotherme. On peut sortir nRT_0 de l'intégrale.

$$\begin{aligned}
W_P &= -nRT_0 \int_{V_0}^{2V_0} \frac{\mathrm{d}V}{V} \\
W_P &= -nRT_0 \Big[\ln(V) \Big]_{V_0}^{2V_0} \\
W_P &= -nRT_0 \ln\left(\frac{2V_0}{V_0}\right)
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{W_P = -nRT_0 \ln(2) < 0}$
Pour la détente $W_P < 0$: le système **fournit réellement** du travail au milieu extérieur.
D'après le 1er principe : $\Delta U = W + Q$, soit $\boxed{Q = -W_P = nRT_0 \ln(2) > 0}$
Le système reçoit réellement du transfert thermique de la part du milieu extérieur. En effet au cours de la détente, pour que la température du gaz reste constante il faut fournir du transfert thermique au gaz (sinon sa température diminuerait au cours de la détente).

Problème n°2 La physique dans la cuisine ($\sim$ 1h15)

La chimie c'est de la cuisine, mais il y a tant de physique dans la cuisine également !

I Évaporation dans une bouteille d'eau

On considère une gourde en plastique assimilée à un cylindre de rayon $r = 3,25$ cm et de hauteur $H = 17$ cm.
Vous la remplissez d'eau liquide à 80%, les 20% restant étant de l'air humide de la cuisine de température $T_c = 20$ °C, dont l'humidité relative est $HR = 40\%$.
Vous fermez la bouteille hermétiquement. On suppose que la température reste constante égale à T_c.
L'air et la vapeur d'eau sont assimilés à des gaz parfaits.

On rappelle la définition de l'humidité relative (ou degré hygrométrique) :

$$HR = \frac{P_{\text{eau}}}{P_{\text{sat}}(T)}$$

où P_{eau} est la pression partielle en eau, et $P_{\text{sat}}(T)$ la pression de vapeur saturante de l'eau à la température T.

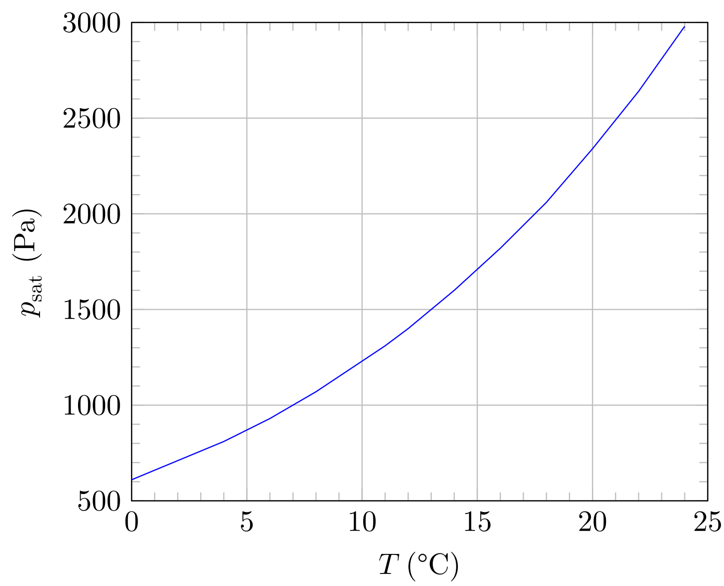


FIGURE 1 – Pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température

R9. Quel phénomène va-t-il se produire dans la gourde à l'interface eau liquide / air ? Pourquoi ?

Solution: Par lecture graphique $\boxed{P_{\text{sat}}(T_c = 20\ °\text{C}) = 2300\ \text{Pa}}$

La pression partielle en eau vaut donc $\boxed{P^i_{\text{eau}} = HR \times P_{\text{sat}}(T_c = 20\ °\text{C}) = 920\ \text{Pa}}$

$P^i_{\text{eau}} < P_{\text{sat}}(T_c = 20\ °\text{C})$: l'eau liquide n'est pas à l'équilibre à cette pression, l'eau va donc s'**évaporer** afin de rétablir l'équilibre, jusqu'à ce que la pression partielle en eau soit égale à la pression de vapeur saturante (ou s'il n'y a plus d'eau liquide, ce qui paraît difficile ici).

R10. Exprimer la masse de vapeur d'eau m^i_v initialement présente dans l'atmosphère au-dessus en fonction de M_e, P^i_{eau}, H, r, R, T_c.

Solution: Initialement, d'après la loi des gaz parfaits $P^i_{\text{eau}} V_g = \dfrac{m^i_v}{M_e} R T_c$, où $V_g = 0,2V = 0,2H\pi r^2$ est le volume occupé par l'atmosphère.

Ainsi $\boxed{m^i_v = M_e \dfrac{P^i_{\text{eau}} \times 0,2H\pi r^2}{RT_c}} = 7,67.10^{-7}\ \text{kg}$

R11. Quelle masse d'eau m^f_v sera présente dans l'atmosphère quand le phénomène identifié précédemment sera terminé ? On supposera pour cela que la quantité d'eau liquide qui s'évapore est faible par rapport à la quantité initiale, et qu'on peut négliger la variation du volume d'eau liquide.

Solution: L'évaporation sera terminée quand la pression partielle en eau dans l'atmosphère sera égale à $P_{\text{sat}}(T_c)$.

La masse d'eau vapeur dans l'atmosphère au-dessus de la bouteille s'exprime selon

$$\boxed{m^f_v = \frac{M_e P_{\text{sat}}(T_c) \times 0,2 \times \pi r^2 H}{RT_c} = 1,92.10^{-6}\ \text{kg}}$$

R12. Déterminez la variation de la hauteur d'eau que le phénomène engendre dans la gourde. L'hypothèse effectuée à la question précédente était-elle légitime ?

Solution:

La masse d'eau liquide qui s'est évaporée vaut $m_{\text{evap}} = m^f_v - m^i_v = 1,15.10^{-6}\ \text{kg}$

Le volume d'eau liquide occupé par cette masse vaut $V_{\text{evap}} = \dfrac{m_{\text{eva}}}{\rho_\ell} = 1,15.10^{-9}\ \text{m}^3$

La variation de la hauteur d'eau liquide correspondant à ce volume évaporé serait de $\Delta h_{\text{evap}} = \dfrac{V_{\text{evap}}}{\pi r^2} = 3,5.10^{-7}\ \text{m}$! La variation de la hauteur d'eau est donc très faible par rapport à la hauteur d'eau. L'hypothèse effectuée est donc acceptable.

II Un café tristement abandonné dans une cuisine (1^{er} principe)

Vous vous servez une tasse de café de $V = 20$ cL, de température $T_0 = 60$ °C en vous levant, l'histoire de vous réveiller avant d'affronter les 4 heures de DS de physique. Malheureusement, vous oubliez de le boire. Il est alors abandonné toute la journée, dans la cuisine de température $T_c = 20$ °C.

On suppose que le café dans la tasse est un système fermé, et la transformation monotherme et isochore.

R13. Commenter physiquement les hypothèses faites sur la transformation subie par le café.

Solution: Système : { Café dans la tasse }
$$\begin{array}{c} \text{EI} \\ T_i = T_0 = 60\ °\text{C} \\ V \\ m = \rho_\ell V \end{array} \xrightarrow[\text{isochore}]{\text{monotherme}} \begin{array}{c} \text{EF} \\ T_f = T_c = 20\ °\text{C} \\ V \\ m = \rho_\ell V \end{array}$$

Si on néglige l'évaporation du café, le café contenu dans la tasse est un système fermé.

Le café est un liquide dont on peut supposer le volume indépendant de la température, ainsi au cours du refroidissement, on peut considérer le volume constant et la transformation isochore.

Supposer la transformation monotherme suppose que la température l'air de la cuisine n'évolue pas au cours de la transformation.

R14. Que vaut la température finale du café ?

Solution: Une fois l'équilibre thermique atteint, la température du café est égale à celle de l'air de la cuisine, attendu que la tasse permet les transferts thermiques : $\boxed{T_f = T_c}$

R15. Établir l'expression du transfert thermique reçu par le café au cours de la transformation en fonction de c_ℓ, T_0, T_c, ρ_ℓ et V.
Faire l'application numérique. Commenter physiquement le signe du transfert thermique.

Solution: On applique le premier principe au café : $\Delta U = W_P + Q$

Le travail des forces de pression vaut $\boxed{W_P = \int_V^V -P_{\text{ext}} \mathrm{d}V = 0}$ car le volume est constant.

Ainsi $\boxed{Q = \Delta U}$

Or, pour une phase condensée : $\Delta U = mc_\ell(T_c - T_0)$

Soit $\boxed{Q = \rho V c_\ell (T_c - T_0) = -33,4 \text{ kJ} < 0}$: le café cède réellement du transfert thermique au milieu extérieur, en effet le café étant plus chaud que l'air de la cuisine, le transfert thermique a lieu du café vers la cuisine.

ATTENTION AUX UNITÉS !!

III Thé buvable immédiatement (1^er^ principe)

Vous souhaitez boire un thé le matin, vous faites bouillir de l'eau à la température $T_1 = 100$ °C et vous en versez un volume $V_1 = 20$ cL dans un mug à double paroi. Cependant, en retard pour votre DS de physique, il vous faut ajouter de l'eau pour le rendre buvable immédiatement, soit à la température $T_F = 60$ °C. Vous ajoutez pour cela un volume V_2 d'eau froide du robinet à $T_2 = 10$ °C.

R16. Définir le système et décrire précisément la transformation, en faisant des hypothèses raisonnables (on pourra s'inspirer de la partie précédente). On justifiera notamment pourquoi la transformation peut être supposée adiabatique.

Solution: Système : { eau dans la tasse calorifugée }

EI	$\xrightarrow{\text{transformation adiabatique et isochore}}$	EF
$\boxed{1}$ eau (ℓ)		eau (ℓ)
$V_1 = 80$ cL		V_1
$m_1 = \rho V_1$		m_1
$T_1 = 373$ K		$T_F = 333$ K
$\boxed{2}$ eau (ℓ)		eau (ℓ)
$V_2 = ??$		V_2
$m_2 = \rho V_2$		m_2
$T_2 = 283$ K		$T_F = 333$ K

On néglige l'évaporation, et ainsi on peut considérer le $\boxed{\text{système fermé}}$.

La transformation se fait sans changement d'état, et le système est constitué d'eau liquide que l'on peut supposer indilatable : la transformation est $\boxed{\text{isochore}}$

L'homogénéisation de la température lors du mélange du thé bouillant et de l'eau froide est très rapide. Le mug est à double paroi, on peut donc raisonnablement négliger les transferts thermiques avec le milieu extérieur sur la durée de la transformation.

R17. En justifiant parfaitement, établir la relation entre V_1, V_2, T_F, T_1 et T_2.

Solution: Premier principe : $\Delta U = Q + W_P$
Le système est constitué d'eau liquide uniquement, qui est une phase condensée incompressible et indilatable, donc la transformation est isochore, donc $\boxed{W_P = 0}$
Le système est enfermé dans un thermos qui limite grandement les transferts thermiques avec l'extérieur, que l'on peut négliger à l'échelle du temps de la transformation : $\boxed{Q = 0}$
Le premier principe donne donc $\boxed{\Delta U = 0}$
L'énergie interne est additive : $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$, avec :

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= C_{V1}(T_F - T_1)\\ &= m_1 c_\ell (T_F - T_1)\\ &= \rho_\ell V_1 c_\ell (T_F - T_1)\end{aligned}$$

De même : $\Delta U_2 = \rho_\ell V_2 c_\ell (T_F - T_2)$
Ainsi $\boxed{\Delta U = \rho c_\ell \Big(V_1(T_F - T_1) + V_2(T_F - T_2)\Big)}$
Ainsi $\rho c_\ell \Big(V_1(T_F - T_1) + V_2(T_F - T_2)\Big) = 0$, soit $\boxed{V_1(T_F - T_1) + V_2(T_F - T_2) = 0}$

R18. En déduire le volume d'eau froide à ajouter pour pouvoir boire votre thé immédiatement.

Solution: Le volume d'eau froide à ajouter est : $\boxed{V_2 = -V_1 \dfrac{T_F - T_1}{T_F - T_2} = 16 \text{ cL}}$ (il faut agrandir le mug !)

IV Filtration sur Büchner

Petit tour en chimie ! Vous avez déjà utilisé un Büchner pour effectuer une filtration sous vide.
On constate lors de son utilisation que l'eau, issue de la filtration qui se trouve dans l'erlenmeyer, bout.

R19. Pourquoi observe-t-on cela ?

Solution: L'écoulement de l'eau aspire l'air contenu dans l'erlenmeyer, la pression de l'air chute (voir cours de mécanique des fluides et la relation de Bernoulli). Quand la pression de l'air dans l'erlenmeyer devient inférieure à la pression de vapeur saturante de l'eau à la température de l'expérience, l'eau subit une vaporisation. On observe une ébullition car l'eau passe à l'état gazeux en volume, et les bulles d'eau vapeur au sein de l'eau liquide remonte. D'après le graphe précédent, s'il fait 20 °C dans le laboratoire, l'ébullition sera observée dès que la pression dans l'erlenmeyer devient inférieure à 2230 Pa $= 0,023$ bar $= 2,3\% \times P_{\text{atm}}$
Ce n'est pas une évaporation qui se produit en superficie quand la pression partielle est inférieure à la pression de vapeur saturante.

Problème n°3 Utilisation de l'énergie houlomotrice ($\sim$ 45 min)

On modélise ce dispositif par un pendule pesant composé d'un solide S en rotation autour de l'axe Oy et complètement immergé dans l'eau. Le pendule est fixé au sol (au fond de la mer) par un dispositif non représenté sur le schéma. Le point O est donc fixe par rapport au sol. Les mouvements ont lieu dans le plan vertical (xOz). Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ forment une base orthonormée directe.
On suppose que :

- le référentiel terrestre est galiléen ;
- le centre de poussée (point d'application de la poussée d'Archimède) pour le solide S est ici confondu avec son centre de gravité G ;
- il existe un couple résistant exercé au niveau de l'axe de rotation du pendule de la forme : $\overrightarrow{C} = -\alpha\dot{\theta}\overrightarrow{u_y}$;
- la houle exerce une force de la forme $\overrightarrow{F} = \beta\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$ en G.

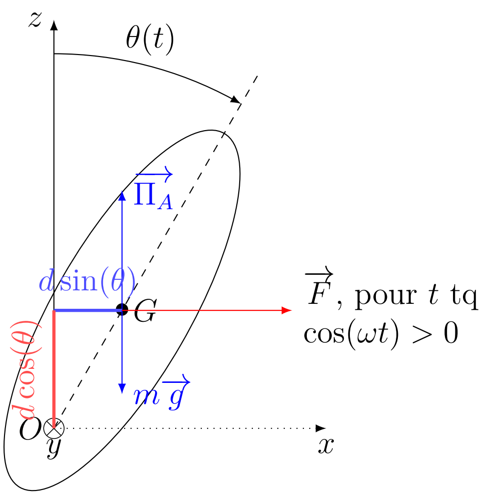
Solution:
Système : Solide S de masse m
Référentiel : Terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'étude
Bilan des actions mécaniques :

— poids $m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$ qui s'applique en G

— poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_e V\overrightarrow{g}$ qui s'applique en G (hypothèse)

— force exercée par la houle $\overrightarrow{F} = \beta\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$ qui s'applique en G

— couple résistant au niveau de la liaison pivot : $\overrightarrow{C} = -\alpha\dot{\theta}\overrightarrow{u_y}$ « couple » = action mécanique de résultante nulle et de moment non nul. Par abus de langage, on appelle le moment du couple plus simplement « le couple »



R20. En raisonnant de manière qualitative sur les forces, déterminer la condition sur ρ_e, m et V pour que, en absence de houle, la position d'équilibre stable du pendule corresponde à $\theta = 0$.

Solution: Attention à la rigueur !
Le poids et la poussée d'Archimède sont les deux forces verticales. Le poids tend à ramener le solide vers le bas, tandis que la poussée d'Archimède tend à le ramener vers le haut.
Les deux positions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ sont des positions d'équilibre, pour lesquels tous les moments par rapport à l'axe de rotation (Oy) seront nuls.
On souhaite que $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable, c'est-à-dire qu'en cas de légère perturbation le pendule y revienne. Pour cela, il faut que le moment résultant tende à faire tourner pour ramener le solide vers le haut.
Pour $\theta > 0$, il faut que le moment résultant par rapport à (Oy) soit négatif pour faire tourner le solide dans le sens indirect : $mgd\sin(\theta) - \rho_e V d\sin(\theta) < 0$ soit, $\rho_e V - m > 0$.
Si $\theta < 0$, il faut faire tourner le solide dans le sens direct pour ramener le solide vers le haut, donc il faut que le moment résultant par rapport à (Oy) soit positif.
En absence de houle, la position d'équilibre stable du pendule correspond à $\theta = 0$, ssi $\boxed{m < \rho_e V}$

R21. Déterminer les moments des différentes forces s'exerçant sur le solide S par rapport à l'axe Oy.

Solution: Attention l'axe (Oy) part derrière, le sens « horaire » est donc le sens direct ici.

— Moment du poids : $\mathscr{M}_{Oy}(m\vec{g}) = +mgd\sin(\theta)$, car le bras de levier vaut $d\sin(\theta)$ et le poids tend ici à faire tourner dans le sens direct par rapport à l'axe (Oy).

— Moment de la poussée d'Archimède : $\mathscr{M}_{Oy}(\overrightarrow{\Pi_A}) = -\rho_e V g d\sin(\theta)$, car le bras de levier vaut $d\sin(\theta)$ et la poussée d'Archimède tend ici à faire tourner dans le sens direct par rapport à l'axe (Oy).

— Moment de $\vec{F}$: $\mathscr{M}_{Oy}(\vec{F}) = +\beta\cos(\omega t)d\cos(\theta)$, car le bras de levier vaut $d\cos(\theta)$ et que dans le cas représenté sur le schéma (t tq $\cos(\omega t) > 0$, la force tend à faire tourner dans le sens direct).

— Moment de l'action de la liaison pivot, déjà fourni : $C = -\alpha\dot{\theta}$

R22. Établir l'équation du mouvement du solide S, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par θ.

Solution: Le théorème du moment cinétique appliquée au solide S par rapport à l'axe (Oy) donne :
$\dfrac{\mathrm{d}L_{Oy}(S)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{Oy}(m\vec{g}) + \mathscr{M}_{Oy}(\overrightarrow{\Pi_A}) + \mathscr{M}_{Oy}(\vec{F}) + C$
Soit $\boxed{J\ddot{\theta} = (m-\rho_e V)gd\sin(\theta) + \beta\cos(\omega t)d\cos(\theta) - \alpha\dot{\theta}}$

R23. On se place dans l'approximation des petits angles. Linéariser alors l'équation différentielle précédente. On mettra l'équation sous la forme

$$\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta(t) = f(t)$$

et on précisera les expressions des différents termes λ, ω_0 et $f(t)$.

Solution: On se place dans l'approximation des petits angles, c'est-à-dire $\theta \ll 1$ rad, alors $\sin(\theta) \approx \theta$ et $\cos(\theta) \approx 1$ (DL au premier ordre de $\cos(\theta)$.
On obtient : $J\ddot{\theta} = (m-\rho_e V)gd\theta + \beta\cos(\omega t)d - \alpha\dot{\theta}$
Soit $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{\alpha}{J}\dot{\theta} + \dfrac{(\rho_e V - m)gd}{J}\theta = \dfrac{\beta d}{J}\cos(\omega t)}$, que l'on identifie avec $\boxed{\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta(t) = f(t)}$
En introduisant :

- la pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{(\rho_e V - m)gd}{J}}}$. Dans le cadre de la question 1, on a bien $\dfrac{(\rho_e V - m)gd}{J} > 0$.
- $\boxed{\lambda = \dfrac{\alpha}{J}}$
- $\boxed{f(t) = \dfrac{\beta d}{J}\cos(\omega t)}$

R24. On se place en régime sinusoïdal forcé. On note $\underline{\theta} = \theta_0(\omega)e^{j(\omega t + \varphi)}$ et $\theta = Re(\underline{\theta})$. Déterminer l'expression de $\theta_0(\omega) = |\underline{\theta}|$.

Solution: Dans le cadre du RSF, on utilise la notation complexe pour $\theta(t)$: $-\omega^2\underline{\theta} + i\lambda\omega\underline{\theta} + \omega_0^2\underline{\theta} = \dfrac{\beta d}{J}e^{j\omega t}$

Ainsi $\boxed{\underline{\theta}(t) = \dfrac{\frac{\beta d}{J}e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\lambda\omega}}$

Ainsi $\boxed{\theta_0(\omega) = |\underline{\theta}| = \dfrac{\frac{\beta d}{J}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \lambda^2\omega^2}}}$

Revoir l'utilisation de la représentation complexe .

R25. La puissance récupérée est proportionnelle à $\dot{\theta}^2$: on la note $\mathscr{P}_r(t) = \gamma\dot{\theta}^2$.
Établir l'expression de la puissance moyenne $\mathscr{P}_m$ récupérée en fonction de ω.

Indications (j'espère que vous mesurez la chance que vous avez ! ces indications n'étaient pas présentes dans le sujet initial) :

— Pour que cela soit plus simple pour la suite, arrangez-vous pour que ω n'intervienne qu'au dénominateur.

— On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f périodique de période T est définie par $< y >= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

— On rappelle que $\langle\cos^2(x)\rangle = \langle\sin^2(x)\rangle = \dfrac{1}{2}$

Solution: $\underline{\dot{\theta}} = i\omega\underline{\theta} = \dfrac{i\omega \times \dfrac{\beta d}{J}e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\lambda\omega}$

Ainsi $\dot{\theta} = \omega\theta_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi + \pi/2) = -\omega\theta_0\sin(\omega t + \varphi)$

Donc $\boxed{\mathscr{P}_r(t) = \gamma\dot{\theta}^2 = \gamma\theta_0^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)}$

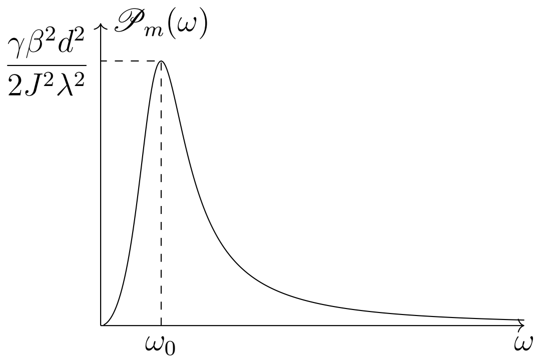
La puissance moyenne vaut alors : $\boxed{\mathscr{P}_m = \dfrac{\gamma\omega^2\theta_0^2}{2}}$, car la valeur moyenne d'un cosinus au carré vaut 1/2.

$$\boxed{\mathscr{P}_m = \frac{\dfrac{\gamma\omega^2}{2} \times \dfrac{\beta^2 d^2}{J^2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \lambda^2\omega^2} = \frac{\dfrac{\gamma\beta^2 d^2}{2J^2}}{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + \lambda^2}}$$

R26. Tracer l'allure de $\mathscr{P}_m$ en fonction de ω. Pour quelle pulsation y a-t-il résonance ?

Solution:

$\lim\limits_{\omega\to 0} \mathscr{P}_m = 0$
$\lim\limits_{\omega\to\infty} \mathscr{P}_m = 0$
De plus $\mathscr{P}_m(\omega)$ est maximal quand le dénominateur est minimal,
donc lorsque $\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 = 0$, soit pour $\boxed{\omega = \omega_0}$
La courbe de $\mathscr{P}_m(\omega)$ ressemble à celle obtenue pour la résonance en intensité dans un RLC série.



R27. Calculer la pulsation propre ω_0 puis la période propre T_0.
Données : accélération de la pesanteur $g = 10$ m · s^{-2}, $d = 10$ m, $V = 1000$ m^3, $m = 300$ t et on prendra $J \approx md^2$.

Solution: A.N. : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{(\rho_e V - m)gd}{J}} \approx 1,5$ rad · s^{-1} soit $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \approx 4,1$ s

Problème n°4 Mesures avec des pendules (∼ 1 heure)

I Mesure du champ de pesanteur avec un pendule pesant

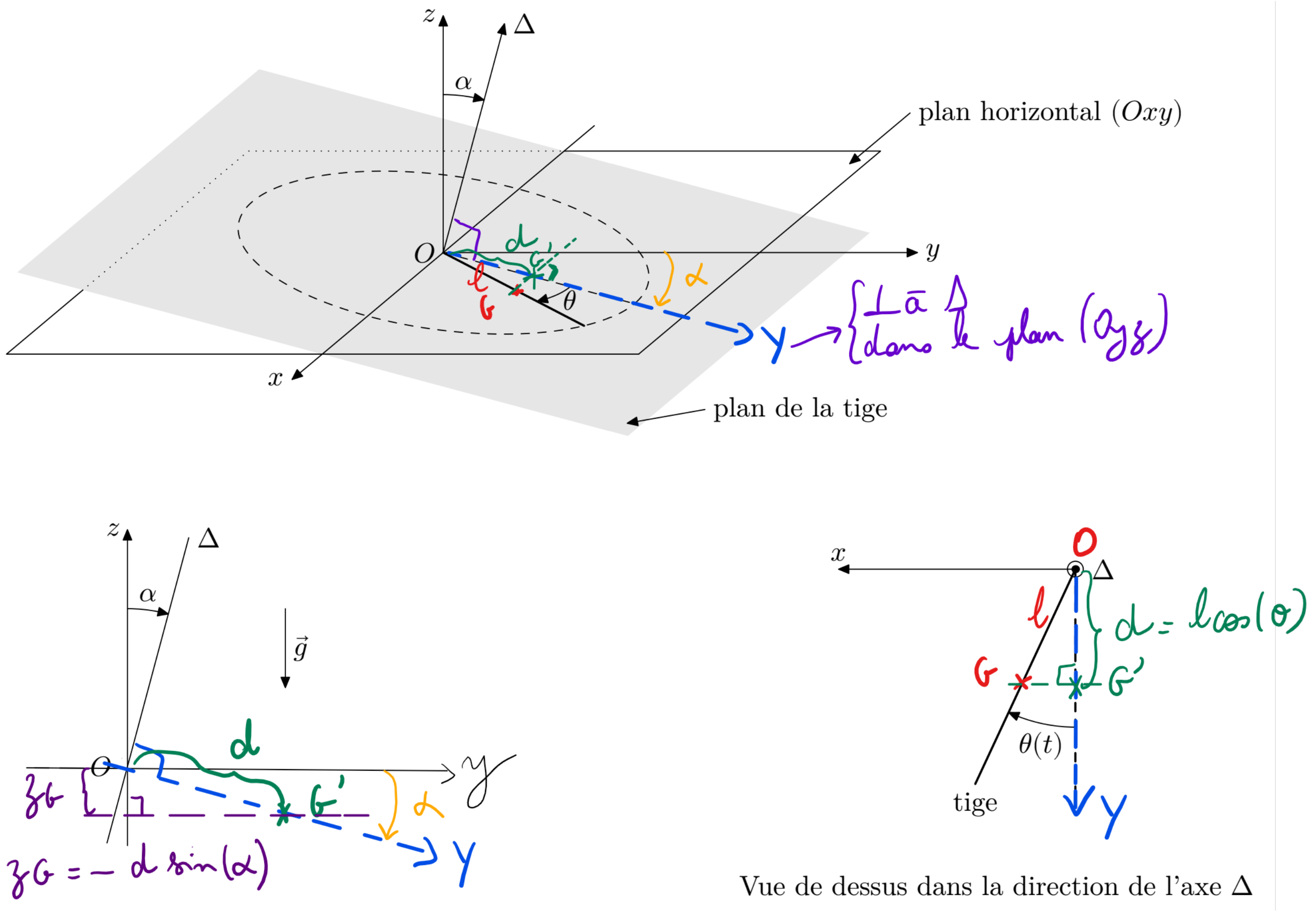


FIGURE 2 – Pendule pesant

On note $\theta(t)$ l'angle de rotation de la tige par rapport à sa position d'équilibre, c'est-à-dire la position pour laquelle le centre d'inertie de la tige a une altitude z minimale.

On adopte les hypothèses suivantes :

— le référentiel d'étude est supposé galiléen ;

— la liaison pivot au point d'attache O entre la tige et l'axe est supposée parfaite ;

— les frottements sont négligés.

La tige est supposée homogène, de longueur 2ℓ et de masse m. Elle a pour moment d'inertie $J = \frac{4}{3}m\ell^2$ par rapport à l'axe Δ.

R28. Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_p de la tige en fonction de m, g, ℓ, α et θ. La réponse devra être parfaitement justifiée et s'appuyer sur des schémas clairs.

> **Solution:** Système : tige
> Référentiel : terrestre considéré galiléen
> Bilan des actions mécaniques :
> — poids
> — liaison pivot parfaite
> — frottements négligés

L'honnêteté est une qualité recherchée chez les scientifiques ! Établissez les résultats honnêtement.

Énergie potentielle de pesanteur : $E_p = mgz_G + K$, où K est une constante.

— D'après les dessins ci-dessus, on peut déterminer z_G : $z_G = -d\sin(\alpha) < 0$, avec $d = \ell\cos(\theta)$, ainsi $z_G = -\ell\sin(\alpha)\cos(\theta) < 0$

— OU on peut utiliser : $z_G = \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{u_z}$, avec $\overrightarrow{OG} = \ell\cos(\theta)\overrightarrow{u_Y} + \ell\sin(\theta)\overrightarrow{u_x}$
Ainsi $z_G = \ell\cos(\theta)\overrightarrow{u_Y} \cdot \overrightarrow{u_z}$ ($\overrightarrow{u_x} \perp \overrightarrow{u_z}$)
Or $\overrightarrow{u_Y}$ est dans le plan (Oyz) et incliné d'un angle α par rapport à Oy, soit $\overrightarrow{u_Y} \cdot \overrightarrow{u_z} = -\sin(\alpha)$
Ainsi $z_G = -\ell\cos(\theta)\sin(\alpha)$

Soit $\boxed{E_p = -mg\ell\sin(\alpha)\cos(\theta) + K}$

On peut chercher à déterminer K mais cela n'a pas d'importance pour la suite...

R29. En utilisant une méthode énergétique, montrer que $\theta(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{4}\frac{g}{\ell}\sin\alpha\sin\theta(t) = 0$$

Solution: Les questions se suivent : la question précédente demandait d'établir l'énergie potentielle, ça devait vous mettre sur la voie de l'utilisation de l'énergie mécaniques.

Les frottements sont négligés, et la liaison pivot est supposée parfaite, le moment de l'action de la liaison pivot par rapport à l'axe Δ sont donc nuls.

L'énergie mécanique de la tige se conserve, or $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mg\ell\sin(\alpha)\cos(\theta)$

$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$, soit $J\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg\ell\sin(\alpha)\dot{\theta}\sin(\theta) = 0$

Soit $\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin(\alpha)\sin(\theta) = 0$

Ainsi $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3g}{4\ell}\sin(\alpha)\sin(\theta) = 0}$

On se limite à partir de maintenant à des oscillations de faible amplitude. On note T_0 la période des oscillations de la même tige mais dans un plan vertical, soit pour $\alpha = 90°$.

R30. Exprimer la période T des oscillations de tige en fonction de α et de T_0. Commenter le choix de α.

Solution: Cette question était FACILE à condition de poser réellement les expressions des périodes sans inventer des relations de proportionnalité ou autres...

Dans le cas des petites oscillations $\sin(\theta) \approx \theta$, donc l'équation différentielle devient $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3g}{4\ell}\sin(\alpha)\theta = 0}$

On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega = \sqrt{\frac{3g}{4\ell}\sin(\alpha)}$ soit la période propre vaut $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{4\ell}{3g\sin(\alpha)}}}$

Pour $\alpha = 90°$, $\sin(\alpha) = 1$, dans ce cas la période propre vaut $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{4\ell}{3g}}}$

Ainsi $\boxed{T = \frac{T_0}{\sqrt{\sin(\alpha)}}}$

Choisir α faible augmente fortement la période des oscillations.

On définit la sensibilité du dispositif de mesure par la grandeur

$$S = \left|\frac{\Delta T}{\Delta g}\right|$$

avec ΔT la variation de la période T engendrée par une variation Δg du champ de pesanteur. On fait l'hypothèse que $\Delta T \ll T$ et que $\Delta g \ll g$.

R31. Exprimer S en fonction de ℓ, α et g.

Solution: Question difficile, mais ATTENTION à ne pas considérer que toutes les relations sont des relations de proportionnalité...

ATTENTION $\Delta\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \neq \dfrac{1}{\Delta x}$

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{4\ell}{3g\sin(\alpha)}} \\
T' = T + \Delta T &= 2\pi\sqrt{\frac{4\ell}{3(g+\Delta g)\sin(\alpha)}} \\
T + \Delta T &= \frac{2\pi\sqrt{4\ell}}{\sqrt{3\sin(\alpha)}} \times \frac{1}{\sqrt{g+\Delta g}} \\
T + \Delta T &= \frac{2\pi\sqrt{4\ell}}{\sqrt{3g\sin(\alpha)}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\Delta g}{g}}} \\
T + \Delta T &\approx \frac{2\pi\sqrt{4\ell}}{\sqrt{3g\sin(\alpha)}} \times \left(1 - \frac{\Delta g}{2g}\right) \\
T + \Delta T &= T\left(1 - \frac{\Delta g}{2g}\right) \\
\Delta T &= -T\frac{\Delta g}{2g} \\
\left|\frac{\Delta T}{\Delta g}\right| &= \frac{T}{2g}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{S = \left|\dfrac{\Delta T}{\Delta g}\right| = \dfrac{\pi}{g}\sqrt{\dfrac{4\ell}{3g\sin(\alpha)}}}$

On cherche à mettre en évidence une anomalie gravitationnelle $\Delta g = 1 \times 10^{-4}$ m · s^{-2}.

R32. De quel angle α en degrés doit-on incliner l'axe de rotation Δ si l'on souhaite que cela corresponde à une variation $\Delta T = 1$ ms avec une tige de longueur égale à 1 m ? Commenter.

Solution:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\Delta T}{\Delta g}\right| &= \frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{4\ell}{3g\sin(\alpha)}} \\
\sin(\alpha) &= \frac{4\pi^2\ell}{3g^3S^2}
\end{aligned}$$

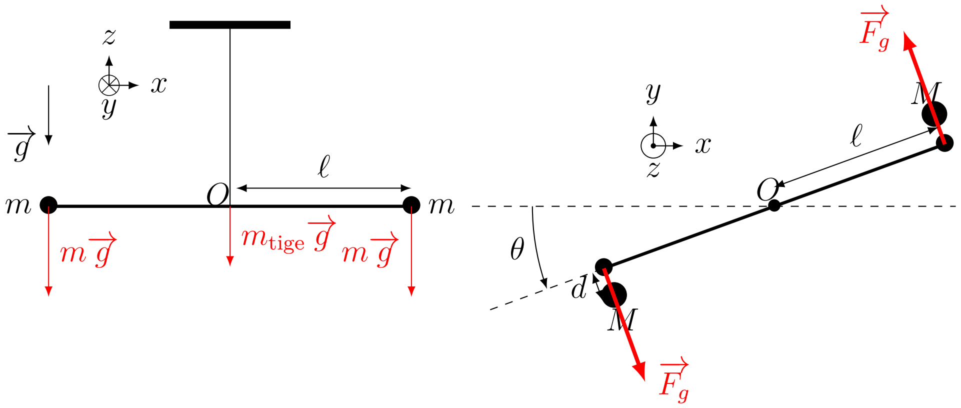
Soit $\alpha \approx 0,008°$
C'est extrêmement faible et cela paraît difficilement mesurable !

II Mesure de la constante universelle de gravitation

R33. Exprimer la norme de la force d'attraction gravitationnelle exercée par une masse M sur la masse m la plus proche.

Solution: Bilan des forces à poser proprement, sans en oublier !
Système : {Tige + les 2 masses m}
Référentiel : Terrestre supposé galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des forces :

- poids de la tige et des deux masses $m\vec{g} + m_{\text{tige}}\vec{g}$ selon $\vec{e_z}$
- action du fil de moment : $\vec{\mathscr{M}} = -k\theta\vec{e_z}$
- forces gravitationnelles exercées par les masse M



La norme de la force d'attraction gravitationnelle exercée par une masse M sur la masse m la plus proche s'écrit : $\boxed{F_g = \dfrac{GmM}{d^2}}$

R34. Exprimer le moment résultant par rapport à l'axe (Oz) des forces d'attraction gravitationnelle.

Solution: Chacune des masses est soumise à la force d'attraction gravitationnelle dont la norme est donnée ci-dessus.
La valeur absolue du moment de cette force d'attraction gravitationnelle par rapport à (Oz) est donné, avec le bras de levier, par : $|\mathscr{M}_{Oz}(\vec{F_g})| = F_g \times \ell$ La force $\vec{F_g}$ est perpendiculaire à la tige, le bras de levier est directemnet ℓ.
De plus, ces deux forces font tourner la barre dans le sens direct par rapport à l'axe Oz, donc $\mathscr{M}_{Oz}(\text{grav}) = +F_g \times \ell$
Ainsi, le moment résultant par rapport à l'axe (Oz) des forces d'attraction gravitationnelle vaut
$\boxed{\mathscr{M}_{Oz}(\text{grav}) = 2F_g \times \ell = 2\dfrac{GMm}{d^2}\ell}$
Il y a DEUX forces d'attraction gravitationnelle à prendre en compte.

R35. En déduire une relation entre k, θ, G, m, M, d et ℓ.

Solution: À l'équilibre, la somme des moments des forces par rapport à Oz agissant sur le système est nulle : $\mathscr{M}_{Oz}(\text{poids}) + \mathscr{M}_{Oz}(\text{grav}) + \mathscr{M}_{Oz}(\text{couple rappel}) = 0$, avec $\mathscr{M}_{Oz}(\text{poids}) = 0$ car le poids est colinéaire à l'axe Oz.
D'où $\boxed{2\dfrac{GmM}{d^2}\ell - k\theta = 0}$

R36. En déduire la valeur de G mesurée par Cavendish.

Solution: En isolant G : $\boxed{G = \dfrac{k\theta d^2}{2mM\ell} = 6,56.10^{-11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{kg}^{-1}}$
La valeur est donc très proche de la valeur actuellement tabulée (environ 3% d'écart).