Lundi 20 mars 2023

Devoir Surveillé n°8 (1) – *Corrigé*

Chapitres concernés : Mécanique du point

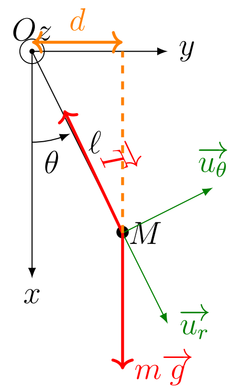
— Mouvement de particules chargées dans un champ électrique ou magnétique

— Théorème du moment cinétique pour le point matériel

— Mouvement à force centrale conservative

Problème n°1 Exercice de cours : le pendule simple (*∼ 20 min*)

On étudie le désormais classique pendule simple, constitué d'un point matériel M de masse m accroché à l'extrémité d'un fil inextensible sans masse de longueur ℓ. On repère la position du point M par l'angle θ entre la verticale descendante et le fil. Tous les frottements sont négligés.

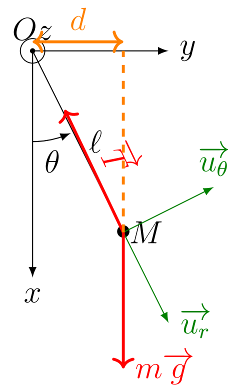


Solution:

On représente la base cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$
Système : $M(m)$
Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des forces :

— Poids $m\overrightarrow{g}$

— Tension du fil $\overrightarrow{T}$



R1. Définir le moment cinétique de M par rapport à l'axe (Oz), puis l'exprimer en fonction de m, ℓ et $\dot{\theta}$.

Solution:

Le moment cinétique de M par rapport à l'axe (Oz) est définit par : $\boxed{L_{Oz}(M) = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}\right) \cdot \overrightarrow{u_z}}$ Le mouvement est circulaire de rayon ℓ :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \ell\overrightarrow{u_r} \\
\overrightarrow{v}(M) &= \ell\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\
L_{Oz}(M) &= \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} \\
&= \left(\ell\overrightarrow{u_r} \wedge m\ell\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} \\
&= m\ell^2\dot{\theta}
\end{aligned}$$

$\boxed{L_{Oz}(M) = m\ell^2\dot{\theta}}$

R2. Définir le moment d'une force $\overrightarrow{f}$ par rapport à l'axe (Oz).
Exprimer le moment des forces qui s'exercent sur M par rapport à l'axe (Oz) en utilisant le bras de levier. Les constructions nécessaires seront présentes sur le schéma. Les signes des moments devront être justifiés.

Solution: Le moment de la force $\overrightarrow{f}$ par rapport à l'axe (Oz) est défini par :
$\boxed{\mathscr{M}_{Oz}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{f}) \cdot \overrightarrow{u_z} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_z}}$

La droite d'action de la tension du fil passe par l'axe (Oz), donc $\boxed{\mathscr{M}_{Oz}(\overrightarrow{T}) = 0}$

$|\mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g})| = mg \times d$, avec d le bras de levier, c'est-à-dire la distance entre la droite d'action de $m\overrightarrow{g}$ et l'axe (Oz) : $d = \ell \sin(\theta)$

De plus, $m\overrightarrow{g}$ tend à faire tourner dans le sens indirect par rapport à l'axe (Oz), donc $\mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) < 0$

Ainsi $\boxed{\mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) = -mg\ell \sin(\theta)}$

R3. Après avoir énoncé le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz), établir l'équation du mouvement vérifiée par θ.

Solution: On applique la loi du moment cinétique à $M(m)$ par rapport à l'axe (Oz) dans le référentiel terrestre galiléen.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L_{Oz}(M)}{\mathrm{d}t} &= \mathscr{M}_{Oz}(\overrightarrow{T}) + \mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) \\
\frac{\mathrm{d}(m\ell^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} &= 0 - mg\ell \sin(\theta) \\
m\ell^2\ddot{\theta} &= -mg\ell \sin(\theta) \\
\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) &= 0
\end{aligned}$$

L'équation du mouvement est donc : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0}$

Problème n°2 LHC *(D'après Concours ATS)*

Ce sujet est extrait du sujet de Concours ATS 2015 (Prépa ATS = prépa en 1 an pour des titulaires d'un BTS ou d'un DUT).

I Particule dans un champ électrique constant et uniforme

R1. Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E}$?

Solution: Système : proton de masse m_p et de charge $q = +e$
Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.
Le proton subit la force $\boxed{\overrightarrow{f} = e\overrightarrow{E}}$

R2. Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ $E = 100\ \mathrm{kV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

Solution: Calculons le poids du proton $m_p g = 1,67.10^{-26}$ N et la force subie par un proton plongé dans un champ $E = 100\ \mathrm{kV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ $f = eE = 1,6.10^{-14}$ N

Ainsi $\boxed{\dfrac{m_p g}{f} \approx 10^{-12}}$: le poids est donc 10^{12} fois plus faible que la force générée par le champ électrique, on pourra donc négliger le poids.

R3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer l'accélération que ressent un proton dans une zone de l'espace ou règne un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E}$.
Que peut-on dire du vecteur accélération ?

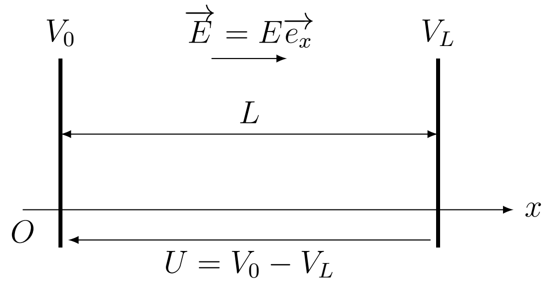


FIGURE 1 – Schéma du dispositif d'accélération des protons

Solution: On applique le principe fondamental de la dynamique à un proton : $m_p\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f}$, donc $\boxed{\overrightarrow{a} = \dfrac{e\overrightarrow{E}}{m_p}}$
Le vecteur accélération est constant au courant du mouvement du proton.

R4. Donner l'expression de l'énergie potentielle électrique d'une particule chargée de charge q en fonction du potentiel électrique V.

R5. En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique du proton sortant de la zone d'accélération, en fonction de la tension U.

Solution: On applique la loi de l'énergie cinétique au proton allant de $x = 0$ à $x = L$: $\Delta\mathscr{E}_c = \mathcal{W}(\overrightarrow{f})$
Avec $\Delta\mathscr{E}_c = \mathscr{E}_c(L) - \mathscr{E}_c(0) = \mathscr{E}_c(L)$ (on néglige l'énergie cinétique en O)
et $\mathcal{W}(\overrightarrow{f}) = -\Delta\mathscr{E}_p = -(-eV_L + eV_0) = eU$, donc $\boxed{\mathscr{E}_c(L) = eU}$, avec $U = V_0 - V_L$.

II Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN.
Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale U_c toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont injectés en O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$ parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-accélératrice U_0.

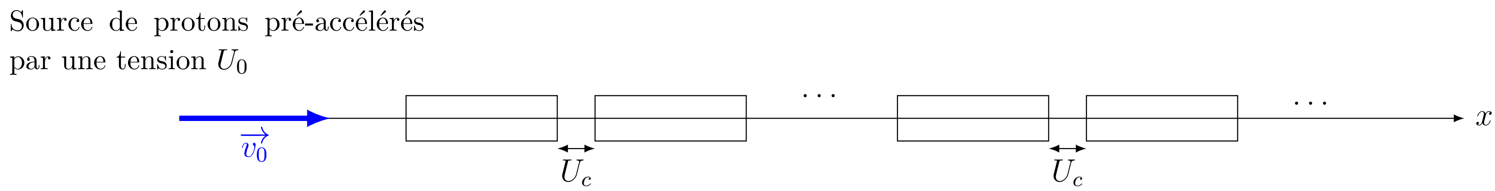


FIGURE 2 – Le linac 2

R6. Exprimer l'énergie cinétique du proton, puis sa vitesse v_0 en O, en fonction de U_0, e et m_p.

Solution: D'après la question précédente : $\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv_0^2 = eU_0$, donc $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}}$

R7. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?

Solution: Entre deux tubes voisins, le proton est soumis à une différence de potentiel de U_c, la loi de l'énergie cinétique appliquée à un proton entre deux tubes voisins permet d'écrire que $\boxed{\Delta\mathscr{E}_c = eU_c}$ (d'après les calculs précédemment réalisés).

R8. Exprimer l'énergie cinétique du proton à la sortie du n-ième tube (attention : après n tubes, il y a eu $n-1$ zones accélératrices) en fonction de U_c et U_0.

Solution: Ainsi, à la sortie du n-ième tube, le proton a été accéléré une fois sous la tension U_0, puis $n-1$ fois sous la tension U_c, ainsi $\boxed{\mathscr{E}_c(n) = e\Big(U_0 + (n-1)U_c\Big)}$

R9. Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10^e tube pour $U_0 = 200$ kV, $U_c = 2000$ kV.

Solution:
Ainsi la vitesse v_{10} du proton à la sortie du 10-ième tube est donnée par : $\frac{1}{2}m_p v_{10}^2 = e\Big(U_0 + 9U_c\Big)$, soit

$$\boxed{v_{10} = \sqrt{\frac{2e\Big(U_0+9U_c\Big)}{m_p}}}$$

A.N. : $\underline{v_{10} = 5,90.10^7 \text{ m/s}}$

R10. Sachant qu'une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, ces protons sont-ils relativistes ?

Solution: Une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, c'est-à-dire 10^8 m/s, ces protons qui sont de vitesse inférieure à $\frac{c}{3}$ ne sont donc pas relativistes.

III Du linac 2 au synchroton à protons (PS)

Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS).
Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.
On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$.
À $t = 0$ sa vitesse $\overrightarrow{v_0}$ est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 3.

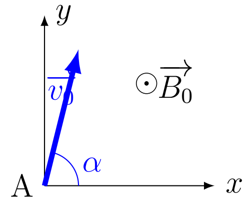


FIGURE 3 – Vitesse du proton dans le champ magnétique

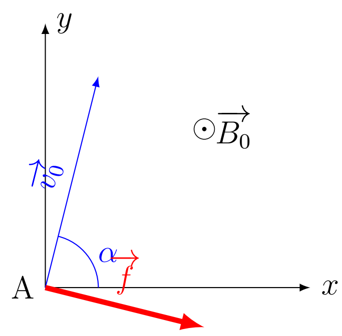
R11. Donner l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$.

Solution: La force que subit le proton soumis au champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ est la force de Lorentz qui s'écrit $\boxed{\overrightarrow{f} = e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}}$

R12. Reproduire la figure 3 sur votre copie afin de représenter la force magnétique subie par le proton en A. Exprimer la norme de cette force.

Solution:

La force en A est représentée ci-contre.
Elle est de norme $\left\|\vec{f}\right\| = \left\|e\vec{v} \wedge \vec{B_0}\right\| = ev_0B_0$, car les vecteurs $\vec{v_0}$ et $\vec{B_0}$ sont orthogonaux.



R13. Calculer un ordre de grandeur de la force précédente et conclure à l'action du poids sur le mouvement du proton.

Solution: A.N. : avec $B \approx 1$ T et $v \approx 6.10^7$ m/s (valeur trouvée précédemment) :
$f \approx 10^{-11}$ N $\approx 10^{15} m_p g$, le poids peut donc être légitimement négligé, le poids n'agit pas sur le mouvement du proton plongé dans un champ magnétique.

R14. Montrer que le travail associé à cette force est nul à chaque instant. En déduire une caractéristique du mouvement du proton.

Solution: Le travail élémentaire de la force magnétique est donné par $\delta W = \left(e\vec{v} \wedge \vec{B_0}\right) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, or $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{v}\mathrm{d}t$,
donc $\boxed{\delta W = \underbrace{\left(e\vec{v} \wedge \vec{B_0}\right)}_{\perp \vec{v}} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t = 0}$
La $\boxed{\text{force de Lorentz magnétique ne travaille pas}}$, donc d'après la LEC, une particule chargée soumise à la seule force de Lorentz magnétique a un $\boxed{\text{mouvement uniforme}}$.

Le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique.

R15. Établir la nature de la trajectoire et exprimer son rayon en fonction de m_p, B_0, e et v_0.

Solution: Appliquons le PFD au proton : $m_p\vec{a} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$

Le mouvement étant plan, on utilise la base de Frenet $\vec{v} = v\vec{T}$ et $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$ (mouvement uniforme)

Ainsi : $\dfrac{v^2}{R}\vec{N} = e\vec{v} \wedge B_0\vec{u_z}$,

En norme : $m_p\dfrac{v_0^2}{R} = ev_0B_0$, car $\vec{v} \perp \vec{B_0}$

R est constant, donc la trajectoire est circulaire, de rayon : $\boxed{R = \dfrac{m_p v_0}{eB_0}}$

R16. Représenter sur le schéma précédent la trajectoire suivi par le proton.

Les aimants utilisés, de 15 m de long et d'environ 35 tonnes, produisent en leur cœur un champ magnétique environ 200 000 fois plus grand que le champ magnétique terrestre. Le LHC en nécessite 1232.

Problème n°3 Satellites GPS (D'après Concours E3A PC 2020)

R1. Rappeler l'expression de la force de gravitation $\overrightarrow{F}$ exercée par la Terre sur un satellite NAVSTAR. Le centre de la Terre est situé en O. On notera r la distance OM du satellite (masse ponctuelle m) placé au point M, $r > R_T$ où R_T est le rayon terrestre. On exprimera $\overrightarrow{F}$ en fonction de la constante de gravitation universelle G, des autres données et on utilisera le vecteur unitaire noté habituellement $\overrightarrow{u_r}$ en coordonnées sphériques (figure 4).

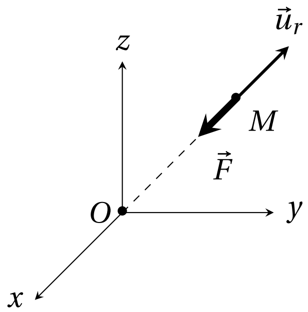


FIGURE 4 – Repère sphérique

Solution: Force de gravitation exercée par la Terre sur le satellite NAVSTAR : $\boxed{\overrightarrow{F} = -G\dfrac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$

R2. En ne prenant en compte que cette unique force d'attraction qui s'exerce sur le satellite, montrer que :

(a) le moment cinétique se conserve ;

Solution:
Système : Satellite NAVSTAR assimilé à un point matériel M de masse m
Référentiel : référentiel géocentrique, supposé galiléen
Bilan des forces : Force de gravitation exercée par la Terre $\overrightarrow{F}$
On applique la loi du moment cinétique à M par rapport au centre de la Terre, O, dans le référentiel géocentrique galiléen : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F})$
Or $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, car $\overrightarrow{F}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ (c'est une force centrale).
Ainsi, le $\boxed{\text{moment cinétique } \overrightarrow{L_O} \text{ est constant}}$

(b) sa trajectoire est plane ;

Solution:
Le moment cinétique est défini par : $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}(M)$ est orthogonal à chaque instant au vecteur position et au vecteur vitesse. Autrement dit, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux à chaque instant au vecteur $\overrightarrow{L_O}$ constant. Ces deux vecteurs sont donc contenus à chaque instant dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{L_O}$, $\boxed{\text{le mouvement a lieu dans le plan contenant } O \text{ et perpendiculaire à } \overrightarrow{L_O}.}$

(c) la grandeur $r^2\dot{\theta}$ se conserve au cours du mouvement ; comment s'appelle cette grandeur ? à quelle loi de Kepler est-elle reliée ?

Solution: Revoir la justification précise !
Le mouvement étant plan, on peut utiliser les coordonnées polaires dans le plan du mouvement.

Le moment cinétique s'exprime alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_O}(M) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M) \\ &= r\overrightarrow{u_r} \wedge m(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) \\ &= mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

La masse m est une constante, de même que le vecteur $\overrightarrow{u_z}$.
La conservation du moment cinétique impose la conservation du produit $r^2 \times \dot{\theta}$, constante qui s'exprime en $\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.
On appelle cette constante, la **constante des aires**, que l'on note $\mathscr{C}$.
La conservation de $r^2\dot{\theta}$ est équivalente à la deuxième loi de Kepler : la loi des aires.

(d) son énergie mécanique notée E_m est conservée ;

Solution:
La force de gravitation est une force conservative qui dérive de l'énergie potentielle $E_p = -\dfrac{GmM_T}{r}$.
Le satellite est donc soumis à une unique force conservative, donc $\boxed{\text{l'énergie mécanique se conserve}}$

(e) et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$$

avec A et B deux constantes positives à définir, s'exprimant en fonction de m, M_T, G et de la constante des aires C. L'énergie potentielle est prise nulle à l'infini.

Solution: Énergie mécanique :

$$\begin{aligned}E_m &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\|\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\|^2 - \frac{GmM_T}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GmM_T}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{C}{r^2}\right)^2 - \frac{GmM_T}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GmM_T}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{B}{r^2} - \frac{A}{r}\end{aligned}$$

L'énergie mécanique s'écrit : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GmM_T}{r}}$, qui se met bien sous la forme fournie, en identifiant $\boxed{B = \frac{mC^2}{2}}$ et $\boxed{A = GmM_T}$

R3. Soit la fonction $E_{p,\text{eff}} = -\dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r^2}$.
Tracer son allure puis prouver qu'elle passe par un minimum noté r_0. Exprimer r_0 en fonction de A et B puis donner sa signification physique ainsi que l'ordre de grandeur de sa valeur numérique pour un **satellite NAVSTAR placé sur son orbite de travail**. Comment est habituellement dénommée cette fonction $E_{p,\text{eff}}$?

Solution:

$E_{p,\text{eff}}$ s'appelle l' $\boxed{\text{énergie potentielle effective}}$

$\lim_{r\to 0} E_{p,\text{eff}} = +\infty$

$\lim_{r\to +\infty} E_{p,\text{eff}} = 0$

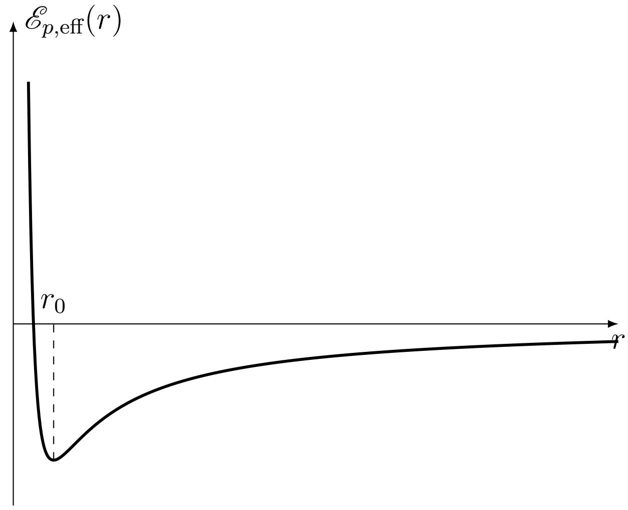
$\dfrac{\mathrm{d}E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r} = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{2B}{r^3}$

$E_{p,\text{eff}}$ présente un minimum en r_0 tel que $\dfrac{A}{r_0^2} = \dfrac{2B}{r_0^3}$,

soit $\boxed{r_0 = \dfrac{2B}{A} = \dfrac{C^2}{GM_T}}$

r_0 est le $\boxed{\text{rayon de la trajectoire circulaire}}$ pour le jeu de condition initiale (position et vitesse) tel que la constante des aires vaut C.

D'après le début de l'énoncé, le système GPS se trouve à l'altitude $h_0 = 20.10^3$ km, donc $\boxed{r_0 = R_T + h_0 = 26,4.10^3 \text{ km}}$



On donne la définition d'un jour sidéral terrestre : c'est la durée que met la Terre pour faire un tour sur elle-même par rapport au point vernal (point considéré comme fixe dans le référentiel héliocentrique), indépendamment de sa révolution autour du Soleil. Elle vaut environ 23 h 56 min 4 s.

R4. Établir l'expression de la norme du vecteur vitesse v_0 sur le mouvement circulaire de rayon r_0. En déduire la troisième loi de Kepler.

Solution:

On étudie la trajectoire circulaire de rayon r_0. Le vecteur accélération s'écrit : $\overrightarrow{a} = -\dfrac{v_0^2}{r_0}\overrightarrow{u_r} + r_0\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

On peut également utiliser la loi des aires pour justifier que $\ddot{\theta} = 0$ et que le mouvement est donc nécessairement uniforme.

On applique le PFD au satellite dans le référentiel géocentrique galiléen :

$$\begin{aligned}
m\overrightarrow{a} &= \overrightarrow{F} \\
m\left(-\frac{v_0^2}{r_0}\overrightarrow{u_r} + r_0\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) &= -\frac{GmM_T}{r_0^2}\overrightarrow{u_r} \\
-m\frac{v_0^2}{r_0} &= -\frac{GmM_T}{r_0^2} \\
v_0^2 &= \frac{GM_T}{r_0}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r_0}}}$

Le mouvement est uniforme, donc la période du mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi r_0}{v_0} \\
T &= 2\pi r_0\sqrt{\frac{r_0}{GM_T}} \\
T &= 2\pi\frac{r_0^{3/2}}{\sqrt{GM_T}} \\
T_0^2 &= \frac{4\pi^2 r_0^3}{GM_T}
\end{aligned}$$

On retrouve la 3[e] loi de Kepler : $\boxed{\dfrac{T^2}{r_0^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}}$

R5. Quelle est la période de révolution du satellite ? Comparer cette valeur à celle d'un jour sidéral et conclure.

Solution:
D'après la troisième loi de Kepler, la période de révolution du satellite vaut
$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r_0^3}{GM_T}} = 4,26.10^4$ s $= 11$ h 50 min 19 s.
Le satellite fait donc un peu plus de deux fois le tour de la Terre en un jour sidéral.

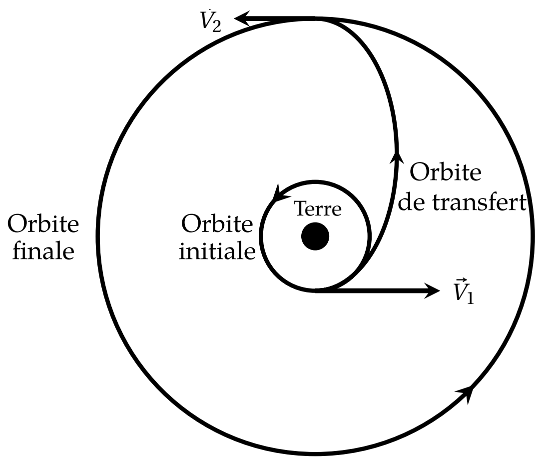


FIGURE 5 – Orbites circulaires et orbite de transfert

Le placement d'un satellite sur son orbite définitive s'effectue très schématiquement en trois phases (figure 5) :
Phase 1 : mise en orbite basse initiale supposée circulaire, de rayon $R_1 = R_T + h_1$, où $h_1 = 1,50 \times 10^3$ km.
Phase 2 : on fournit une très brève impulsion au satellite (vitesse V_1 après l'impulsion) pour le placer sur une orbite elliptique dite transfert (ou d'Hohmann) dont l'apogée se trouve sur l'orbite définitive.
Phase 3 : une seconde impulsion permet d'**atteindre l'orbite finale (de travail)** supposée circulaire de rayon R_2 où la vitesse du satellite est V_2.

R6. Établir l'expression de l'énergie mécanique E_{m1} d'un satellite NAVSTAR de masse $m = 800$ kg sur son orbite basse à l'altitude $h_1 = 1,50 \times 10^3$ km. On suppose l'énergie potentielle nulle à l'infini. Application numérique.

Solution: Sur l'orbite circulaire de rayon $R_1 = R_T + h_1$, la vitesse vaut $v_0 = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R_T + h_1}}$
Ainsi l'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{m1} &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T}{R_T + h_1} \\ &= \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R_T + h_1} - \frac{GM_T}{R_T + h_1} \\ &= -\frac{GmM_T}{2(R_T + h_1)} \end{aligned}$$

Un satellite en mouvement circulaire de rayon $R_1 = R_T + h_1$ est d'énergie mécanique :

$$\boxed{E_{m1} = -\frac{GmM_T}{2(R_T+h_1)} = -2,03.10^{10}\ \mathrm{J}}$$

R7. Comparer E_{m1} à $E_{m0} = \alpha\cos^2(\lambda) - \beta$, énergie mécanique du satellite posé au sol, avant son décollage, de la base de lancement située à la latitude λ. Les valeurs de α et β sont $\alpha = 8,6\times10^7$ J et $\beta = 5,006\times10^{10}$ J. Quelle est la valeur optimale pour λ ? Faire l'application numérique pour cette valeur optimale. Conclure.

Solution: La valeur optimale est $\lambda = 0$ afin que le satellite au sol ait le maximum d'énergie mécanique, ce qui permet de minimiser l'énergie à fournir pour mettre le satellite en orbite. On a alors $E_{m0} = -5,00.10^{10}$ J.

Les moteurs doivent donc fournir environ 30 GJ au satellite pour le mettre sur sa première orbite.

R8. À partir de l'expression de l'énergie mécanique pour une trajectoire circulaire de rayon r, on peut montrer qu'il suffit de substituer au rayon r la valeur du demi-grand axe a de l'ellipse pour généraliser cette expression à une trajectoire elliptique. En déduire la valeur numérique de l'énergie mécanique E_{m12} sur l'orbite de transfert.

Solution: Énergie mécanique sur la trajectoire elliptique : $\boxed{E_{m12} = -\frac{GmM_T}{2a}}$

Le grand-axe s'exprime selon $2a = R_1 + R_2$, soit $2a = R_T + h_1 + r_0$, soit $\boxed{a = \frac{R_T+h_1+r_0}{2}} = 17135$ km

donc $\boxed{E_{m12} = -\frac{GmM_T}{R_1+R_2}}$, avec $R_2 = r_0$.

A.N. : $\underline{E_{m12} = -9.21.10^9\ \mathrm{J}}$

On suppose que la durée d'allumage des fusées est très courte (boost) devant la période de révolution et que le satellite n'a quasiment pas bougé durant cette phase.

R9. En déduire la variation de vitesse ΔV_1 à appliquer au satellite pour qu'il passe de l'orbite basse à celle de transfert. Effectuer l'application numérique.

Solution: Énergie mécanique sur la trajectoire elliptique au moment de l'allumage, la vitesse vaut V_1 et le satellite se trouve à une distance $R_1 = R_T + h_1$ de la Terre : $E_{m12} = -\frac{GmM_T}{R_T+h_1+r_0} = \frac{1}{2}mV_1^2 - \frac{GM_T}{R_T+h_1}$

Ainsi : $\boxed{V_1 = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T+h_1} - \frac{1}{R_T+h_1+r_0}\right)} = 8830\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$

Or la vitesse sur l'orbite basse vaut : $v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h_1}}$

La variation de vitesse à appliquer pour qu'il passe de l'orbite basse à celle de transfert :

$$\boxed{\Delta V_1 = V_1 - v_0 = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T+h_1} - \frac{1}{R_T+h_1+r_0}\right)} - \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h_1}}}$$

A.N. : $\underline{\Delta V_1 = 1720\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$

R10. Quelle est la durée du transfert ?

Solution:

Le transfert correspond à la moitié de la trajectoire elliptique de demi-grand axe a, donc la durée du transfert est la moitié de la période donnée par la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

Ainsi la durée du transfert est de : $\boxed{t_{\text{tr}} = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}} = 1,11.10^4\ \text{s} = 3,09\ \text{h}}$

Pour réduire les coûts, on envisage d'autres trajectoires qui utilisent moins de satellites.

R11. Définir ce qu'on appelle un satellite géostationnaire en précisant les caractéristiques de son orbite, son altitude, sa visibilité depuis un point donné de la Terre, son usage et toute autre donnée jugée digne d'intérêt. On pourra par exemple se poser la question si un tel satellite pourrait se trouver de manière permanente à la verticale d'une ville française en justifiant la réponse.

Solution:

— Un **satellite géostationnaire** est un satellite qui reste constamment au-dessus d'un même point de la surface terrestre. Un satellite géostationnaire est donc immobile par rapport à un observateur immobile de la Terre.

— Deux contraintes pour le plan du mouvement du satellite :

  — En conséquence de la conservation du moment cinétique, le mouvement du satellite géostationnaire est plan et le plan de la trajectoire du satellite contient le centre de force, c'est-à-dire le centre de la Terre.

  — De plus, pour être géostationnaire, il doit rester à chaque instant à la verticale du même point P de la Terre. Par conséquent le plan du mouvement du satellite géostationnaire doit être confondu avec le plan du mouvement du point P de la surface de la Terre.

  Le mouvement d'un point P de la surface de la Terre dans le référentiel géocentrique est un mouvement circulaire dont le centre est sur l'axe de rotation de la Terre (pôle Sud-pôle Nord). Le plan du mouvement du point P est perpendiculaire à l'axe (pôle Sud-pôle Nord).

Ainsi le plan du mouvement du satellite géostationnaire doit contenir le centre de la Terre et doit être perpendiculaire à l'axe (pôle Sud-pôle Nord). Ce plan est unique : c'est le plan de l'équateur.

Le plan de la trajectoire d'un satellite géostationnaire est le plan de l'équateur.

— Un satellite géostationnaire reste à chaque instant à la verticale du même point de la surface de la Terre. Par conséquent, la période du mouvement du satellite géostationnaire doit être de 24h (plus précisément 23h56min4s : durée d'un jour sidéral, c'est-à-dire d'une révolution de la Terre sur elle-même).

La 3ᵉ loi de Kepler permet de déterminer le rayon R_g de l'orbite : $\frac{T^2}{R_g^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

Soit $\boxed{R_g = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$

Or $R_g = R_T + h$, donc $\boxed{h = R_g - R_T = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T}$

A.N. : Avec $T = 23 \times 60 \times 60 + 56 \times 60 + 4\ \text{s} = 86164\ \text{s}$ et $R_T = 6370.10^3\ \text{m}$

Altitude du satellite : $\underline{h = 3,6.10^7\ \text{m} = 36.10^3\ \text{km}}$

— Depuis un point de la Terre, le satellite géostationnaire reste fixe.

R12. Serait-il envisageable d'utiliser uniquement des satellites géostationnaires dans un système GPS ? Expliciter votre réponse.

Solution: Il est intéressant d'utiliser des satellites géostationnaires pour l'observation fixe d'une zone de la Terre, par exemple pour la météo ou pour la TV par satellite.

Problème n°4 Molécule de monoxyde de carbone *()*

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles m_C pour l'atome de carbone et m pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera que l'**atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe** (Ox).

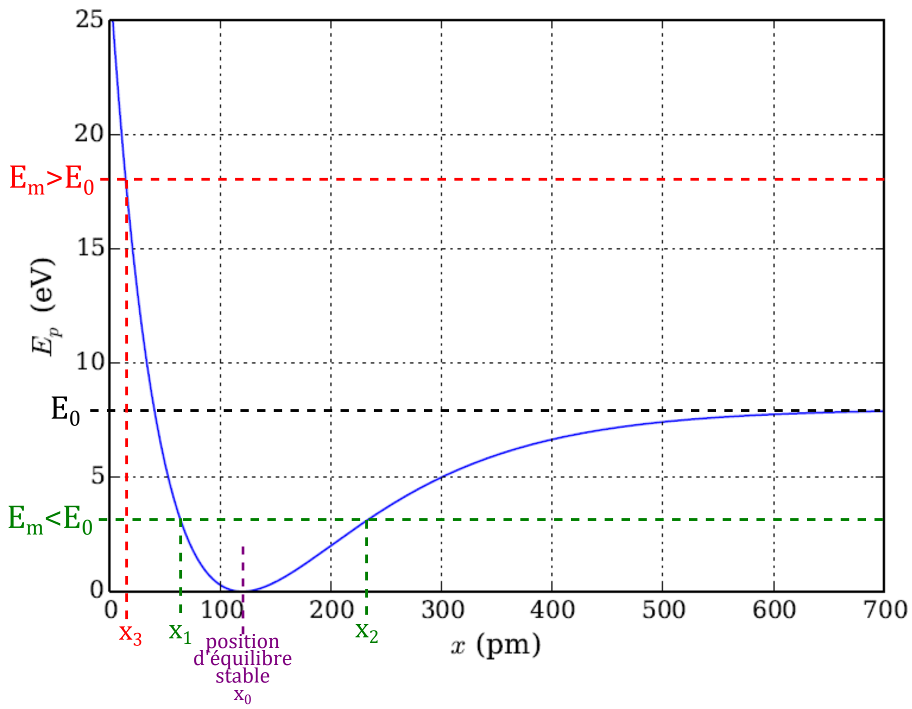
L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle.

L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique :

$$\mathscr{E}_p(x) = \mathscr{E}_0\left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)^2$$

où x est la distance des noyaux des deux atomes et où $\mathscr{E}_0$, β et x_0 sont des constantes positives.

On donne le graphe de $\mathscr{E}_p(x)$ ci-contre.



R1. Déterminer la limite de $\mathscr{E}_p$ en l'infini. En déduire, grâce au graphique, la valeur de $\mathscr{E}_0$.

> **Solution:** $\lim_{x\to\infty} \mathscr{E}_p(x) = \mathscr{E}_0$ et graphiquement, on lit $\mathscr{E}_0 = 8$ eV.

R2. Déterminer l'expression de $\mathscr{E}_p(x_0)$. En déduire, grâce au graphique, la valeur de x_0. Que représente la position x_0 ?

> **Solution:** Calculons : $\mathscr{E}_p(x_0) = 0$ eV et graphiquement, on lit $x_0 = 120$ pm.
> x_0 correspond au minimum de l'énergie potentielle, donc c'est la position d'équilibre stable pour l'atome d'oxygène par rapport à l'atome d'oxygène.

R3. Que peut-on dire de l'énergie mécanique au cours du mouvement ?
Quelle inégalité vérifient l'énergie mécanique et l'énergie potentielle ?

> **Solution:**
>
> — Système : atome d'oxygène
>
> — Référentiel : référentiel du laboratoire considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
>
> — Bilan des actions mécaniques : force exercée par l'atome de carbone qui dérive de l'énergie potentielle d'interaction $\mathscr{E}_p(x) = \mathscr{E}_0\left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)^2$.

L'énergie mécanique de l'atome d'oxygène est constante puisque l'atome d'oxygène est soumis uniquement à une force conservative.
L'énergie mécanique est définie par $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathscr{E}_p$, or $\mathscr{E}_c > 0$, les positions accessibles à l'atome d'oxygène sont celles pour lesquelles $\mathscr{E}_p(x) \leq \mathscr{E}_m$.

R4. À partir de l'analyse du graphe et de la question précédente, analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à $\mathscr{E}_0$.

Solution:
Traçons la fonction $\mathscr{E}_m =$ constante $< \mathscr{E}_0$ sur le graphe précédent. Il y a deux intersections avec la courbe $\mathscr{E}_p(x)$ en x_1 et x_2. Les positions accessibles sont alors $x \in [x_1, x_2]$. L'atome d'oxygène va donc osciller au voisinage de sa position d'équilibre x_0, entre les deux abscisses x_1 et x_2.

R5. Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est supérieure à $\mathscr{E}_0$.

Solution: Traçons la fonction $\mathscr{E}_m =$ constante $> \mathscr{E}_0$ sur le graphe précédent. Il y a une seule intersection avec la courbe $\mathscr{E}_p(x)$ en x_3. Les positions accessibles sont $x \in [x_3, +\infty[$. L'atome d'oxygène peut s'éloigner à l'infini de l'atome de carbone, l'énergie que possède l'atome d'oxygène permet de rompre la liaison, et l'atome d'oxygène s'éloigne de l'atome de carbone.

On s'intéresse au mouvement de vibration de la molécule de CO au voisinage de x_0.
On pourra poser $\varepsilon = \beta(x - x_0)$, et on rappelle qu'au premier ordre : $e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$.

R6. En effectuant un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle d'interaction au voisinage de x_0 (pour $\varepsilon \ll 1$), montrer qu'elle s'écrit $\mathscr{E}_p(x) \approx \mathscr{E}_0\beta^2(x - x_0)^2$.

Solution: Pour $\varepsilon \ll 1$, $e^{-\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$, donc $(1 - e^{-\varepsilon})^2 \approx (1 - (1 - \varepsilon))^2 = \varepsilon^2$
Ainsi, au voisinage de x_0, l'énergie potentielle s'écrit : $\mathscr{E}_p(\varepsilon) \approx \mathscr{E}_0\varepsilon^2$
Ainsi $\boxed{\mathscr{E}_p(x) \approx \mathscr{E}_0\beta^2(x - x_0)^2}$

R7. En déduire que l'énergie mécanique s'écrit : $\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathscr{E}_0\beta^2(x - x_0)^2$

Solution: L'énergie mécanique s'écrit : $\boxed{\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathscr{E}_0\beta^2(x - x_0)^2}$, avec $\|\overrightarrow{v}\|^2 = \dot{x}^2$ (mouvement selon (Ox) uniquement).

R8. Établir l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre.

Solution: L'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, donc $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x - x_0) = 0$, ainsi on obtient $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{2\beta^2\mathscr{E}_0}{m}(x - x_0) = 0}$

R9. En déduire l'expression de la fréquence des petites oscillations de la molécule de monoxyde de carbone autour de sa position d'équilibre.
Faire l'application numérique, avec $\beta = 8,69.10^{-3}$ pm^{-1} ; $M(O) = 16$ g $\cdot$ mol^{-1} ; $\mathscr{N}_{\mathscr{A}} = 6,02.10^{23}$ mol^{-1}.

Solution: On reconnait l'équation du mouvement d'un **oscillateur harmonique de pulsation** $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2\beta^2\mathscr{E}_0}{m}}$, ainsi la fréquence du mouvement est $\boxed{f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2\beta^2\mathscr{E}_0}{m}}}$

⚠ conversions $\mathscr{E}_0 = 8$ eV $= 12,8.10^{-19}$ J, $\beta = 8,69.10^{-3}$ pm^{-1} $= 8,69.10^{9}$ m^{-1} ; $m = \dfrac{M_O}{\mathscr{N}_\mathscr{A}} = 2,66.10^{-26}$ kg

A.N : $f = 1,14.10^{13}$ Hz.