Lundi 20 mars 2023

Devoir Surveillé n°8 (2) – *Corrigé*

Chapitres concernés : Mécanique du point

— Approche énergétique du mouvement du point matériel.

— Mouvement de particules chargées dans un champ électrique ou magnétique

— Théorème du moment cinétique pour le point matériel

— Mouvement à force centrale conservative

Problème n°1 NASA's Mars Exploration Program : Le voyage entre la Terre et Mars *(D'après Centrale PC 2022)*

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains. Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Les sous-parties sont largement indépendantes, mais les données numériques fournies dans les différentes parties sont susceptibles d'être utilisées ailleurs.

Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie (même s'il n'a pas été utilisé). Les principales données numériques sont regroupées dans le document réponse.

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

* Les questions précédées d'une étoile sont plus difficiles.

I Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

R1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.

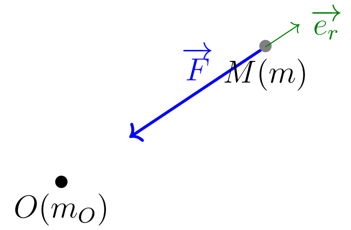
Solution: La force d'attraction gravitationnelle s'exprime $F = \dfrac{GmM_S}{r^2}$

$$\begin{aligned}[G] &= \frac{[F]\times[r^2]}{[mM_S]} \\ &= \frac{M.L.T^{-2}\times L^2}{M^2} \\ &= M^{-1}.L^3.T^{-2}\end{aligned}$$

L'unité SI de G est donc le $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

R2. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ en O, centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.

Solution: On étudie l'objet de masse m dans le référentiel héliocentrique. Il est soumis uniquement à l'attraction gravitationnelle exercée par le soleil : $\vec{F} = -\dfrac{GmM_S}{r^2}\overrightarrow{u_r}$



On applique le théorème du moment cinétique par rapport au centre O du Soleil : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F})$

Or $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, car la $\overrightarrow{F}$ est à chaque instant colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Donc $\overrightarrow{L_O}(M)$ se conserve.

R3. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ avec $\overrightarrow{e_z}$ tel que $\overrightarrow{L_O} = L_O\overrightarrow{e_z}$.
Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de L_O et m. Quel est le nom de cette grandeur ?

Solution: Revoir la justification propre du mouvement plan.

Le moment cinétique du point matériel $M(m)$ par rapport à O est défini par : $\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}(M)$

Par propriété du produit vectoriel, $\overrightarrow{L_O}(M)$ est orthogonal à $\overrightarrow{OM}$ et à $\overrightarrow{v}(M)$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}(M)$ sont orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{L_O}(M)$ qui est constant (en direction, sens et norme).

On en déduit, qu'à tout instant, le mouvement du point matériel $M(m)$ a lieu dans le plan perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{L_O}(M)$ constant, et contenant le centre de force O.

En utilisant les coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_O}(M) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}(M) \\
&= r\overrightarrow{u_r} \wedge m(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) \\
&= mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} \\
&= mC\overrightarrow{e_z} \\
&= L_O\overrightarrow{e_z}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{C = \dfrac{L_O}{m}}$

Or m est constante, donc $r^2 \times \dot{\theta}$ est constant.

On appelle cette grandeur, la **constante des aires**.

R4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R, la vitesse V de l'objet en fonction de G, M_S, R et m.
Calculer les valeurs numériques de V_T, la vitesse orbitale de la Terre et de V_M, celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

Solution: La norme du vecteur vitesse sur le mouvement circulaire : $V = \|\overrightarrow{v}\| = R|\dot{\theta}| = \dfrac{C}{R}$, est constante, le mouvement est donc uniforme.

Principe fondamental de la dynamique à $M(m)$ dans $\mathscr{R}$ galiléen : $m\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R}) = \overrightarrow{F}$

La loi des aires impose au mouvement circulaire d'être uniforme, alors $\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R}) = -\dfrac{V^2}{R}\overrightarrow{u_r}$

Ainsi $-m\dfrac{V^2}{R}\overrightarrow{u_r} = -\dfrac{GmM_S}{R^2}\overrightarrow{u_r}$

Alors : $\boxed{V = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R}}}$

A.N. : Pour la Terre $V_T = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R_T}} = 2,98.10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, en prenant $R_T = a_T$.

Pour Mars $V_M = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R_M}} = 2,42.10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, en prenant $R_M = a_M$.

II Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

R5. Déduire l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G, M_S, R et m.

Solution:

$$\begin{aligned}
\text{Énergie cinétique : } \mathscr{E}_c &= \frac{1}{2}mV^2 \\
&= \frac{GmM_S}{2R} \\
\text{Énergie mécanique : } \mathscr{E}_m &= \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_{p,\text{grav}} \\
&= \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GmM_S}{R} \\
\mathscr{E}_m &= \frac{GmM_S}{2R} - \frac{GmM_S}{R} \\
\mathscr{E}_m &= -\frac{GmM_S}{2R}
\end{aligned}$$

R6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G, M_S et R (troisième loi de Kepler).

Solution: Ne pas oublier de préciser que le mouvement uniforme, ce qui permet d'écrire la durée comme la distance parcourue sur la vitesse.

Le mouvement est circulaire uniforme, la période de rotation s'écrit :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi R}{V} \\
&= \frac{2\pi R}{\sqrt{\dfrac{GM_S}{R}}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}
\end{aligned}$$

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe de la trajectoire.

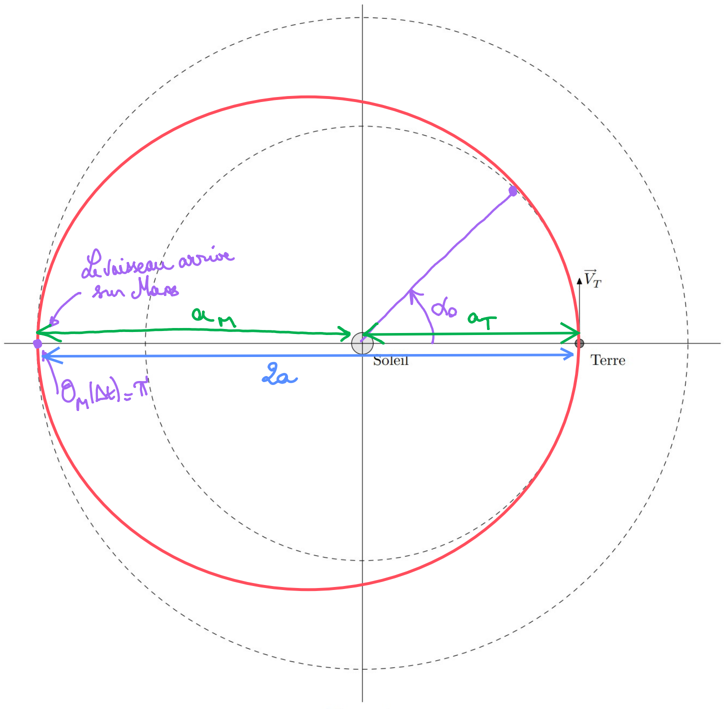
III Voyage aller Terre - Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

R7. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann).
Exprimer le demi grand-axe de l'ellipse de transfert a, en fonction de a_M et a_T.

Solution: Le périhélie de la trajectoire elliptique se situe au niveau de la trajectoire de la Terre, la trajectoire elliptique n'est donc jamais à une distance du soleil inférieure à a_T, donc elle ne passe pas à l'intérieur de la trajectoire de la Terre

Le demi-grand axe est : $2a = a_M + a_T$, donc $\boxed{a = \dfrac{a_M + a_T}{2}}$



La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

R8. Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de V_T, a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert.
En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T.

Solution: ATTENTION, la vitesse n'est pas constante sur un mouvement elliptique, qui n'est pas uniforme. De plus, il faut également distinguer la distance r entre le soleil et le vaisseau (qui varie) et le demi-grand axe, qui n'est pas une distance entre le soeil et le vaisseau.

Sur l'orbite de transfert, l'énergie mécanique s'exprime selon $\mathscr{E}_m = -\dfrac{GM_S m}{2a} = -\dfrac{GM_S m}{a_M + a_T}$

Or par définition de l'énergie mécanique $\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}mV^2 - \dfrac{GmM_S}{r}$

Au niveau de l'orbite de la Terre : $\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}mV_T'^2 - \dfrac{GmM_S}{a_T}$

Alors :

$$\begin{aligned}
-\frac{GM_Sm}{a_M+a_T} &= \frac{1}{2}mV_T'^2 - \frac{GmM_S}{a_T}\\
\frac{1}{2}V_T'^2 &= \frac{GM_S}{a_T} - \frac{GM_S}{a_M+a_T}\\
V_T'^2 &= \frac{2GM_Sa_M}{a_T(a_M+a_T)}\\
V_T'^2 &= V_T^2 \times \frac{2a_M}{a_M+a_T}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{V_T' = V_T\sqrt{\frac{2a_M}{a_M+a_T}}}$

La vitesse varie de : $\boxed{\Delta V_T = V_T' - V_T = V_T\left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_M+a_T}} - 1\right) = 2,93.10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

R9. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.

Solution: Pour parvenir à l'orbite de Mars depuis l'orbite de la Terre, le vaisseau doit décrire une demi-ellipse. La période sur le mouvement elliptique de demi-grand axe a est donnée par la 3e loi de Kepler.

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \frac{T}{2}\\
&= \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_S}}\\
&= \pi\sqrt{\frac{(a_M+a_T)^3}{2GM_S}}\\
&= 2,23.10^7 \text{ s}\\
&= 259 \text{ jours} < T_M = 687 \text{ jours}
\end{aligned}$$

R10. * Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t=0) - \theta_T(t=0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.

Solution: Prenons l'origine des angles à l'instant $t = 0$ auquel le vaisseau quitte la Terre $\theta_T(0) = 0$
Mars décrit une orbite circulaire de rayon a_M à la vitesse v_M constante : $V_M = a_M\dot{\theta}_M$ (*)
Le vaisseau parvient à la trajectoire de Mars pour $\theta_V(\Delta t) = \pi$, pour que Mars soit au rendez-vous il faut $\theta_M(\Delta t) = \pi$
On intègre (*) entre $t = 0$ et $t = \Delta t$:

$$\begin{aligned}
V_M\Delta t &= a_M(\theta_M(\Delta t) - \theta_M(0))\\
V_M\Delta t &= a_M(\pi - \theta_M(0))\\
\theta_M(0) &= \pi - \frac{V_M\Delta t}{a_M}\\
\theta_M(0) &= 0,775 \text{ rad}
\end{aligned}$$

Soit $\alpha_0 = 44,4°$

R11. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

Solution: De la même façon : $\theta_T(2\Delta t) = 0 + \dfrac{V_T}{a_T} \times 2\Delta t$

$\theta_T = 8,86$ rad $= 508°$

La Terre aura fait un tour complet et 147°.

On peut aussi raisonner sur la comparaison entre la période de la Terre et la durée mise par le vaisseau pour décrire toute l'ellipse : $\dfrac{2\Delta t}{T_T} = 1,4$. La terre aura donc effectué un tour complet et $0,4$ fois un deuxième tour.

Le vaisseau ne sera donc pas en phase avec la Terre lorsqu'il atteindra l'orbite terrestre.

IV Durée de la mission

Toujours pour minimiser le cout énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

R12. * Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars.

Solution: Quand le vaisseau arrive sur Terre, il faut que $\theta_V(\Delta t) = \theta_T(\Delta t) = 0$, et quand le vaisseau quitte Mars, le vaisseau est en $\theta_V(0) = \theta_M(0) = \pi$

$\theta_T(\Delta t) - \theta_T(0) = \dfrac{V_T}{a_T}\Delta t$

Soit $\theta_T(0) = -\dfrac{V_T}{a_T}\Delta t$

Soit $\boxed{\alpha_1 = \theta_M(0) - \theta_T(0) = \pi + \dfrac{V_T}{a_T}\Delta t = \pi + \dfrac{2\pi\Delta t}{T_T} = 7,6 \text{ rad}}$

Soit $\boxed{\alpha_1 = 360 + 75°}$

R13. * En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Solution: Le vaisseau part à $t = 0$ de la Terre, l'angle entre la Terre et Mars vaut α_0.

Mars tourne à $\dfrac{V_M}{a_M}$, et la Terre tourne à $\dfrac{V_T}{a_T}$, donc l'angle entre les deux vecteurs ST et SM évolue de $\alpha(t) = \alpha_0 + \left(\dfrac{V_M}{a_M} - \dfrac{V_T}{a_T}\right) t$

Les astronautes doivent partir de Mars l'instant t_1 tel que $\alpha(t_1) = 2n\pi + \alpha_1$, soit $\alpha_0 + \left(\dfrac{V_M}{a_M} - \dfrac{V_T}{a_T}\right) t_1 = \alpha_1 + \pi$.

Soit $t_1 = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_0 + 2n\pi}{\dfrac{V_M}{a_M} - \dfrac{V_T}{a_T}}$

Pour $n = -1$: $t_1 = 712$ jours, à qui il faut enlever les 259 jours du trajet aller, donc la durée sur Mars est de 453 jours.

La durée totale de la mission est donc $453 + 2 \times 259 = 970$ jours.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta\overrightarrow{V_T}$ colinéaire à $\overrightarrow{V_T}$ plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

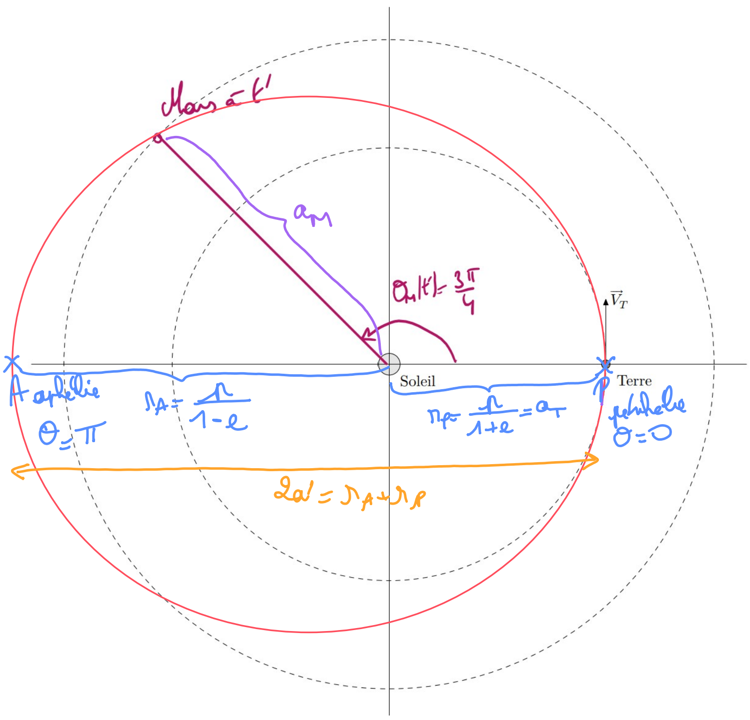
Dans la suite, on cherche une réduction de 25% de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil.

On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t=0)=0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$. On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

R14. Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.

> **Solution:**
>
> 
>

R15. Justifier que r_P, le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie $r_P = a_T$.

> **Solution:** $r(\theta)$ est minimal, au périhélie, pour $1 + e\cos(\theta)$ maxima, donc pour $\theta = 0$. Ainsi $\boxed{r_P = a_T}$, car pour $t = 0$, le vaisseau quitte la Terre situé à l'angle $\theta_T(0) = 0$.

R16. Montrer que l'excentricité s'écrit

$$e = \frac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$$

et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la figure B l'allure de la trajectoire.

> **Solution:** $r(\theta = 0) = \dfrac{p}{1+e} = a_T$
>
> $r(\theta = 3\pi/4) = \dfrac{p}{1 + e\cos(3\pi/4)} = a_M$, or $\cos(3\pi/4) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

En faisant le rapport des deux relations précédentes :

$$\begin{aligned}
\frac{1+e}{1-\frac{e}{\sqrt{2}}} &= \frac{a_M}{a_T} \\
a_T + e a_T &= a_M - \frac{e_M}{\sqrt{2}} \\
e\left(a_T + \frac{a_M}{\sqrt{2}}\right) &= a_M - a_T \\
e &= \frac{a_M - a_T}{a_T + \frac{a_M}{\sqrt{2}}} \\
e &= 0,251 < 1
\end{aligned}$$

La trajectoire est donc elliptique.

R17. Exprimer l'énergie mécanique E_M du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m, V_T et e.

Solution: Sur un mouvement elliptique de demi-grand axe a' : $E_M = -\dfrac{GmM_S}{2a'}$

Or le demi grand axe est tel que :$a' = \dfrac{r_P + r_A}{2}$, avec le périhélie $r_P = a_T = \dfrac{p}{1+e}$ et l'aphélie $r_A = \dfrac{p}{1-e}$

$$\begin{aligned}
2a' &= r_P + r_A \\
2a' &= a_T + \frac{p}{1-e} \\
2a' &= a_T + \frac{a_T(1+e)}{1-e} \\
2a' &= a_T \times \frac{1-e+1+e}{1-e} \\
2a' &= \frac{2a_T}{1-e} \\
\text{Énergie mécanique :} \quad E_M &= -\frac{GmM_S}{2a'} \\
&= -\frac{GmM_S}{2a_T}(1-e) \\
&= -\frac{mV_T^2(1-e)}{2}
\end{aligned}$$

R18. En déduire la vitesse V_T'' que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e.

Solution: Par conservation de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mV_T''^2 - \frac{GmM_T}{a_T} &= -\frac{mV_T^2(1-e)}{2} \\
\frac{1}{2}mV_T''^2 - mV_T^2 &= -\frac{mV_T^2(1-e)}{2} \\
V_T''^2 &= 2V_T^2 - V_T^2(1-e)
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{V_T'' = V_T\sqrt{1+e}}$

R19. Donner, en fonction de V_T et e, la variation de vitesse $\Delta V_T' = V_T'' - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T'$.

Solution: Variation de vitesse $\Delta V_T' = V_T'' - V_T = V_T(\sqrt{1+e} - 1) = 3,53.10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

R20. Exprimer $C = r^2 \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de a_T et V_T''.

Solution: Quand le vaisseau quitte la Terre, son vecteur vitesse est orthoradial, alors $L_O = m a_T V_T''$
Ainsi $\boxed{C = a_T V_T''}$

R21. * Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars.
On donne :

$$\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2,15$$

avec l'excentricité calculée en question R16.

Solution:

$$\begin{aligned}
r(\theta)^2\dot{\theta} &= a_T V_T'' \\
\frac{p^2}{(1+e\cos(\theta))^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= a_T V_T'' \\
\mathrm{d}t &= \frac{1}{a_T V_T''}\frac{p^2}{(1+e\cos(\theta))^2}\mathrm{d}\theta \\
\int_0^{\Delta t'} \mathrm{d}t &= \int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{a_T V_T''}\frac{p^2}{(1+e\cos(\theta))^2}\mathrm{d}\theta \\
\Delta t' &= \frac{p^2}{a_T V_T''}\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \\
\Delta t' &= \frac{(a_T(1+e))^2}{a_T V_T''} \times 2,51 \\
&= 2,51 \times \frac{a_T(1+e)^2}{V_T''} \\
&= 175 \text{ jours}
\end{aligned}$$

La durée du transfert a donc été raccourcie de 84 jours.

Problème n°2 Aurores boréales *(D'après Centrale MP 2016)*

* Les questions précédées d'une étoile sont plus difficiles.

I Aurores polaires terrestres

Les aurores polaires sont des phénomènes lumineux se produisant entre 80 et 400 km d'altitude causés par la précipitation de particules chargées en provenance de l'espace sur les atomes et les molécules des couches externes de l'atmosphère terrestre. Ces particules sont principalement des électrons dont l'énergie cinétique est de l'ordre du keV pour les aurores les plus spectaculaires.

R1. * Expliquer le caractère lumineux d'une aurore polaire.

Solution: « Les particules chargées accélérées dans la queue de la magnétosphère arrivent le long du champ sur les couches denses de l'atmosphère. »
Leurs collisions avec les molécules présentes excitent ces molécules (transfert d'énergie cinétique en énergie interne) qui se désexcitent ensuite en émettant un rayonnement dans le visible, notamment.

R2. * Pourquoi une aurore boréale (hémisphère nord) apparaît-elle simultanément à une aurore australe (hémisphère sud) ? (on s'appuiera sur le document **??** page **??**).

> **Solution:** Vu le schéma fourni dans le document, on remarque une symétrie du champ magnétique par rapport au plan équatorial.

II Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

Afin d'interpréter l'arrivée des particules chargées à l'origine des aurores polaires, on se propose dans la suite de modéliser la dynamique d'un électron dans une zone de champ magnétique stationnaire.

R3. Dans le référentiel géocentrique $(\mathcal{R})$ supposé galiléen, on considère tout d'abord un électron de masse m pénétrant en O dans une zone de champ magnétique $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{u_z}$, avec $(B_0 > 0)$. La force gravitationnelle terrestre a-t-elle une influence sur la dynamique de cet électron ? On attend un argument qualitatif fondé sur un calcul d'ordre de grandeur.

> **Solution:** Utilisez les données numériques de l'énoncé, posez les calculs numériques complètement, sans « balancer » des valeurs/résultats « au hasard ».
> Système : électron $M(m, -e)$
> Référentiel : référentiel géocentrique considéré galiléen.
> Bilan des forces : Force de Lorentz $\overrightarrow{f_L} = -e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$
> Le poids de l'électron est d'ordre de grandeur $mg \approx 10^{-30} \times 10 = 10^{-29}$ N
> La force de Lorentz sur l'électron est d'ordre de grandeur $f_L = evB_0$
> Pour B, on prend l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre.
> Pour v, on peut utiliser l'information qui dit que les électrons ont une énergie cinétique de l'ordre du keV, soit de $\mathscr{E}_c \approx 10^{-16}$ J. Ainsi $v = \sqrt{\dfrac{2\mathscr{E}_c}{m}} \approx \sqrt{\dfrac{10^{-16}}{10^{-30}}} = 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
> Ainsi $f_L \approx 10^{-17}$ N
> Ainsi $f_L \gg mg$: la force gravitationnelle terrestre n'a pas d'influence sur la dynamique de cet électron.

R4. Justifier, en utilisant un théorème énergétique, que le mouvement de l'électron plongé dans le champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ est nécessairement uniforme.

> **Solution:**
> d'après le théorème de la puissance cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\overrightarrow{f_L})$, Or $\mathscr{P}(\overrightarrow{f_L}) = \left(-e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}\right) \cdot \overrightarrow{v} = 0$
> $\mathscr{E}_c$ est donc constante, donc la norme du vecteur vitesse est constante. Le mouvement est par conséquent uniforme.

R5. On suppose que la vitesse initiale de la particule s'écrit $\overrightarrow{v_0} = v_{0z}\overrightarrow{u_z}$, avec $(v_{0z} > 0)$.
Comment se déplace l'électron vis à vis de la direction du champ magnétique ?

> **Solution:** À $t = 0$, $\overrightarrow{f_L} = \overrightarrow{0}$, donc le mouvement de l'électron sera rectiligne (et uniforme).

On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_{0x}\overrightarrow{u_x}$, avec $(v_{0x} > 0)$.

R6. Par analyse dimensionnelle, mettre en évidence une pulsation ω_c caractéristique du mouvement de l'électron en fonction de e, m et B et l'évaluer dans le champ magnétique terrestre régnant à l'altitude d'un satellite géostationnaire.

Solution: Posez honnêtement l'étude des unités pour justifier la réponse.

$$\begin{aligned}
[e] &= C \\
[m] &= kg \\
[B] &= \frac{[f_L]}{[ev]} \\
&= \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} \\
&= \mathrm{kg}\cdot\mathrm{C}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}
\end{aligned}$$

Ainsi $\left[\frac{eB}{m}\right] = \mathrm{s}^{-1}$

On peut donc proposer $\boxed{\omega_c = \frac{eB_0}{m}}$

A.N $\omega_c = \frac{1,6.10^{-19}\times 1,7.10^{-7}}{9,11.10^{-31}} = 3.10^4\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

R7. Par application du principe fondamental de la dynamique, justifier que le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{B_0}$, puis établir les équations couplées suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{eB_0}{m}y + v_{0x} \quad (1) \\ \dot{y} &= \frac{eB_0}{m}x \quad (2) \end{cases}$$

.

Solution: La charge de l'électron est l'opposée de la charge élémentaire : $q = -e$. Les calculs doivent être menés HONNÊTEMENT ! D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned}
m\vec{a} &= \vec{f_L} \\
m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} &= -e\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\B_0\end{pmatrix} \\
m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-eB_0\dot{y}\\ eB_0\dot{x}\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par intégration l'équation selon z, on obtient $\dot{z}(t) = cste = \dot{z}(0) = 0$, donc le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire au vecteur champ magnétique.

On intègre une première fois les deux premières équations issues du PFD : $\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{eB_0}{m}y + A \\ \dot{y} &= \frac{eB_0}{m}x + C \end{cases}$

Or à $t = 0$, $\dot{x}(0) = v_{0x}$, $\dot{y}(0) = 0$, $x(0) = 0 = y(0)$

On obtient le système demandé : $\boxed{\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{eB_0}{m}y + v_{0x} \quad (1) \\ \dot{y} &= \frac{eB_0}{m}x \quad (2) \end{cases}}$

R8. En déduire l'équation différentielle vérifiée par y :

$$\ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c v_{0x}$$

Solution: D'après (2) : $x = \dfrac{\dot{y}}{\omega_c}$, dans (1) : $\dfrac{\ddot{y}}{\omega_c} = -\omega_c y + v_{0x}$

Ainsi $\boxed{\ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c v_{0x}}$

R9. En déduire les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.

Solution: Par intégration de l'équation précédente : $y(t) = A\cos(\omega_c t) + C\sin(\omega_c t) + \dfrac{v_{0x}}{\omega_c}$

Avec $y(0) = 0 = A + \dfrac{v_{0x}}{\omega_c}$

De plus $\dot{y}(0) = C\omega_c = 0$

Ainsi $\boxed{y(t) = \dfrac{v_{0x}}{\omega_c}\left(1 - \cos(\omega_c t)\right)}$

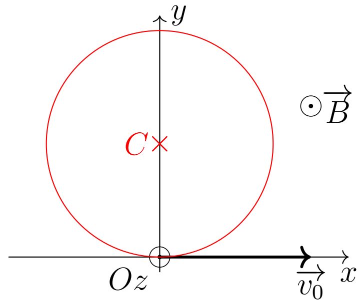
On en déduit $\boxed{x(t) = +\dfrac{v_{0x}}{\omega_c}\sin(\omega_c t)}$

R10. Montrer que la trajectoire de l'électron est circulaire en établissant son équation cartésienne. Représenter la trajectoire et repérer son centre.
Évaluer son rayon R_c.

Solution:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega_c}\sin(\omega_c t)\\
y(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega_c}\left(1-\cos(\omega_c t)\right)\\
\sin(\omega_c t) &= \omega_c \frac{x}{v_{0x}}\\
\cos(\omega_c t) &= 1 - \frac{\omega_c}{v_{0x}} y\\
1 &= \left(\frac{\omega_c}{v_{0x}}x\right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{v_{0x}}y - 1\right)^2\\
\frac{v_{0x}^2}{\omega_c^2} &= x^2 + \left(y - \frac{v_{0x}}{\omega_c}\right)^2
\end{aligned}$$

C'est l'équation cartésienne d'un cercle de rayon $\boxed{R_c = \dfrac{v_{0x}}{\omega_c} = \dfrac{m v_{0x}}{eB}}$, de centre $C\left(0, \dfrac{v_{0x}}{\omega_c}\right)$



A.N. : $R_c = \dfrac{10^{-7}}{3.10^4} \approx 3.10^{-12}$ m

Un électron accéléré non relativiste perd de l'énergie en rayonnant à un instant donné une puissance électromagnétique $\mathcal{P} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2}{3}e^{\alpha}c^{\beta}\left\|\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right\|^2$.

R11. Par analyse dimensionnelle, déterminer les valeurs des puissances α et β.

Indication : Pour $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, on pourra utiliser la force de Coulomb pour déterminer sa dimension.

Solution: Posez les unités des différentes grandeurs complètement, et détaillez le calcul sur votre copie.

$$\begin{aligned}
[\mathcal{P}] &= \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] \times [e]^\alpha [c]^\beta \left[\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right\|^2\right] \\
kg.m^2.s^{-3} &= \left[\frac{F_{\mathrm{coul}} r^2}{q^2}\right] \times [e]^\alpha [c]^\beta (m.s^{-2})^2 \\
kg.m^2.s^{-3} &= \frac{kg.m.s^{-2} \times m^2}{C^2} \times [e]^\alpha [c]^\beta (m.s^{-2})^2 \\
s^{-3} &= \frac{m.s^{-2}}{C^2} \times [e]^\alpha [c]^\beta m^2.s^{-4} \\
1 &= \frac{m^3.s^{-3}}{C^2} \times [e]^\alpha [c]^\beta \\
[e]^\alpha [c]^\beta &= \frac{C^2}{(m.s^{-1})^3}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\alpha = 2 \text{ et } \beta = -3}$

Soit $\mathcal{P} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2e^2}{3c^3}\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right\|^2$

R12. * En utilisant l'expression obtenue R10, exprimer la variation de l'énergie cinétique de l'électron $\mathrm{d}E_c$ lorsque R_c varie de $\mathrm{d}R_c$.

Établir l'équation différentielle vérifiée par R_c et l'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}R_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R_c}{\tau} = 0$

Solution:

$$\begin{aligned}
\text{Vitesse : } v &= \omega_c R_c \\
\text{Énergie cinétique : } E_c &= \frac{1}{2} m \omega_c^2 R_c^2 \\
\text{Dérivée temporelle : } \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2} m \omega_c^2 \times 2 R_c \frac{\mathrm{d}R_c}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{d}E_c = m\omega_c^2 R_c \mathrm{d}R_c}$

D'après le théorème de la puissance cinétique :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} &= -\mathcal{P} \\
\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right\|^2 \\
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} &= -R_c\omega_c^2 \overrightarrow{e_r} \quad \text{mouvement circulaire uniforme} \\
\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3} R_c^2 \omega_c^4 \\
m\omega_c^2 R_c \frac{\mathrm{d}R_c}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3} R_c^2 \omega_c^4 \\
\frac{\mathrm{d}R_c}{\mathrm{d}t} + \frac{e^2\omega_c^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m} R_c &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}R_c}{\mathrm{d}t} + \frac{R_c}{\tau} &= 0
\end{aligned}$$

avec $\tau = \dfrac{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}{e^2\omega_c^2}$

R13. En déduire l'expression de la fonction $R_c(t)$ et établir que le temps caractéristique τ mis en évidence s'écrit $\tau = \dfrac{6\pi\varepsilon_0 c^3 B_0}{e\omega_c^3}$.
L'évaluer et commenter.

Solution: On en déduit l'évolution temporelle $\boxed{R_c(t) = R_c(0)e^{-\frac{t}{\tau}}}$: le rayon de la trajectoire circulaire de l'électron diminue au cours du temps, le mouvement de l'électron est une spirale, et il finit par s'arrêter au bout de quelques τ.
Expression de τ : $\tau = \dfrac{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}{e^2\omega_c^2} = \dfrac{6\pi\varepsilon_0 c^3}{e\omega_c^2} \times \dfrac{mB_0}{eB_0} = \dfrac{6\pi\varepsilon_0 c^3}{e\omega_c^2} \times \dfrac{B_0}{\omega_c}$, on retrouve l'expression fournie.
A.N. $\tau \approx 1,8.10^{14}\ \text{s} = 6\ \text{millionsd'années}$. Ce phénomène peut donc être négligé à l'échelle de l'observation.

R14. On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_{0x}\overrightarrow{u_x} + v_{0z}\overrightarrow{u_z}$, avec $(v_{0x} > 0$ et $v_{0z} > 0)$. Comment se déplace l'électron vis à vis du champ magnétique ?

Solution: Le mouvement de l'électron est ici une combinaison d'un mouvement rectiligne uniforme dans le sens de l'axe (Oz), et d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan (Oxy). Il s'agit donc d'un mouvement hélicoïdal d'axe (Oz).

III Ceintures de Van Allen

La Terre est entourée d'une zone où des particules de haute énergie cinétique, typiquement de quelques 100 MeV au GeV, sont piégées par le champ magnétique. Ces particules sont réparties dans des ceintures autour du plan équatorial dites ceintures de Van Allen ou ceintures de radiation. Ces ceintures sont très stables et contrairement aux autres éléments de la magnétosphère, elles sont peu sensibles aux orages, sous-orages et autres reconfigurations de la magnétosphère. De ce fait, les particules s'en échappent difficilement.

R15. Évaluer la vitesse typique d'un électron dans ces ceintures. La dynamique d'un tel électron peut-elle se déduire des résultats précédents ?

Solution:
La vitesse de électrons de telles énergies $v = \sqrt{\dfrac{2E_c}{m}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 100.10^6 \times 1,6.10^{-19}}{9,1.10^{-31}}} \approx 5,9.10^9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} > c$!!!
Le cadre de la mécanique classique utilisé ici n'est pas valable. Il faut le cadre de la mécanique relativiste pour étudier convenablement ce mouvement.

Problème n°3 Molécule de monoxyde de carbone ()

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles m_C pour l'atome de carbone et m pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera que l'**atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe** (Ox).

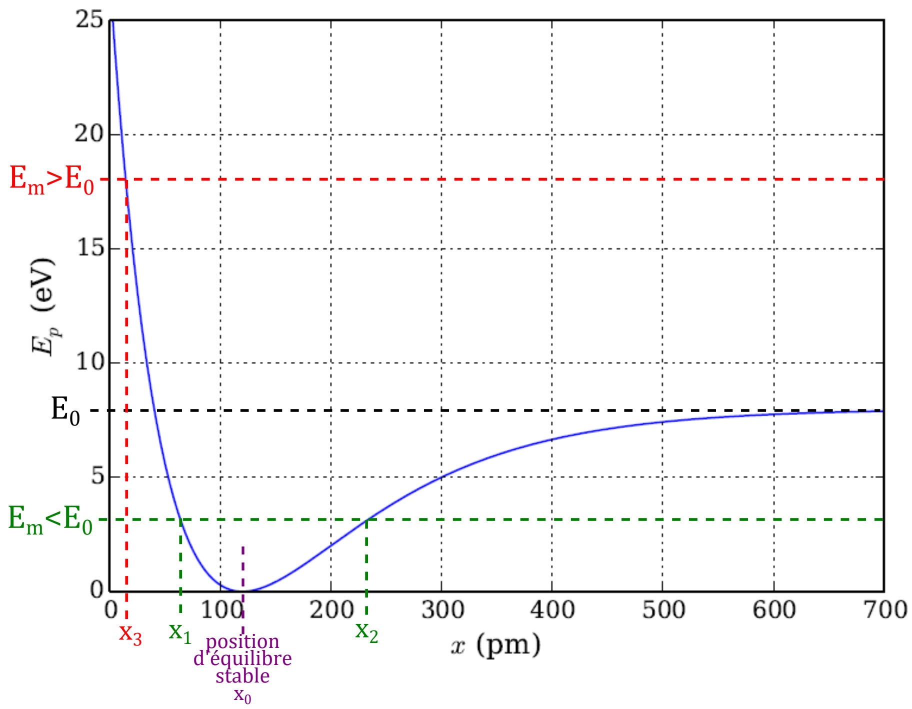
L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle.

L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique :

$$\mathscr{E}_p(x) = \mathscr{E}_0\left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)^2$$

où x est la distance des noyaux des deux atomes et où $\mathscr{E}_0$, β et x_0 sont des constantes positives.

On donne le graphe de $\mathscr{E}_p(x)$ ci-contre.



R1. Quelle est la dimension de β ?

> **Solution:** L'argument de l'exponentielle doit être sans dimension, donc β a la dimension de l'inverse d'une distance.

R2. Déterminer la limite de $\mathscr{E}_p$ en l'infini. En déduire, grâce au graphique, la valeur de $\mathscr{E}_0$.

> **Solution:** $\lim\limits_{x\to\infty} \mathscr{E}_p(x) = \mathscr{E}_0$ et graphiquement, on lit $\mathscr{E}_0 = 8$ eV.

R3. Déterminer l'expression de $\mathscr{E}_p(x_0)$. En déduire, grâce au graphique, la valeur de x_0. Que représente la position x_0 ?

> **Solution:** Calculons : $\mathscr{E}_p(x_0) = 0$ eV et graphiquement, on lit $x_0 = 120$ pm.
> x_0 correspond au minimum de l'énergie potentielle, donc c'est la position d'équilibre stable pour l'atome d'oxygène par rapport à l'atome d'oxygène.

R4. Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à $\mathscr{E}_0$.

> **Solution:** Une réponse précise, justifiée, s'appuyant sur le graphique fourni, et sur des arguments physiques, est nécessaire.

> — Système : atome d'oxygène
> — Référentiel : référentiel du laboratoire considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
> — Bilan des actions mécaniques : force exercée par l'atome de carbone qui dérive de l'énergie potentielle d'interaction $\mathscr{E}_p(x) = \mathscr{E}_0\left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)^2$.
>
> L'énergie mécanique de l'atome d'oxygène est constante puisque l'atome d'oxygène est soumis uniquement à une force conservative.
> L'énergie mécanique est définie par $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathscr{E}_p$, or $\mathscr{E}_c > 0$, les positions accessibles à l'atome d'oxygène sont celles pour lesquelles $\mathscr{E}_p(x) \leq \mathscr{E}_m$.
> Traçons la fonction $\mathscr{E}_m =$ constante $< \mathscr{E}_0$ sur le graphe précédent. Il y a deux intersections avec la courbe $\mathscr{E}_p(x)$ en x_1 et x_2. Les positions accessibles sont alors $x \in [x_1, x_2]$. L'atome d'oxygène va donc osciller au voisinage de sa position d'équilibre x_0, entre les deux abscisses x_1 et x_2.

R5. Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est supérieure à $\mathscr{E}_0$.

> **Solution:** Traçons la fonction $\mathscr{E}_m =$ constante $> \mathscr{E}_0$ sur le graphe précédent. Il y a une seule intersection avec la courbe $\mathscr{E}_p(x)$ en x_3. Les positions accessibles sont $x \in [x_3, +\infty[$. L'atome d'oxygène peut s'éloigner à l'infini de l'atome de carbone, l'énergie que possède l'atome d'oxygène permet de rompre la liaison, et l'atome d'oxygène s'éloigne de l'atome de carbone.

On s'intéresse au mouvement de vibration de la molécule de CO au voisinage de x_0.
On pose $\varepsilon = \beta(x - x_0)$.

R6. En effectuant un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle d'interaction au voisinage de x_0 (pour $\varepsilon \ll 1$), montrer qu'elle s'écrit $\mathscr{E}_p(x) \approx \mathscr{E}_0\beta^2(x - x_0)^2$.

> **Solution:** Au voisinage de x_0 : $\mathscr{E}_p(\varepsilon) \approx \mathscr{E}_0(1 - (1 - \varepsilon))^2 \approx \mathscr{E}_0\varepsilon^2$
> Ainsi $\boxed{\mathscr{E}_p(x) \approx \mathscr{E}_0\beta^2(x - x_0)^2}$

R7. Établir l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre en utilisant l'énergie mécanique.

> **Solution:** L'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, donc $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x - x_0) = 0$, ainsi on obtient $\boxed{\ddot{x} + \frac{2\beta^2\mathscr{E}_0}{m}(x - x_0) = 0}$

R8. En déduire la fréquence des petites oscillations de la molécule de monoxyde de carbone autour de sa position d'équilibre.
Faire l'application numérique, avec $\beta = 8,69.10^{-3}$ pm^{-1} ; $M(O) = 16$ g · mol^{-1} ; $\mathscr{N}_\mathscr{A} = 6,02.10^{23}$ mol^{-1}.

> **Solution:** On reconnait l'équation du mouvement d'un **oscillateur harmonique de pulsation** $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\beta^2\mathscr{E}_0}{m}}$, ainsi la fréquence du mouvement est $\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\beta^2\mathscr{E}_0}{m}}}$
> ⚠ conversions $\mathscr{E}_0 = 8$ eV $= 12,8.10^{-19}$ J, $\beta = 8,69.10^{-3}$ pm^{-1} $= 8,69.10^{9}$ m^{-1} ; $m = \frac{M_O}{\mathscr{N}_\mathscr{A}} = 2,66.10^{-26}$ kg
> A.N : $f = 1,14.10^{13}$ Hz.