À rendre le LUNDI 29 avril 2024

Devoir Maison n°17

Travail à rendre :

- Le DM est un peu long, commencez-le tôt !!
- Tous les exercices doivent être traités.
- Deux fichiers python sont associés à ce DM : https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-vernet/docs?rep=227.
  Les fichiers peuvent être ouverts avec :
  - Spyder
  - python en ligne : https://www.mycompiler.io/fr/new/python
- Indiquer votre prénom/nom à l'emplacement prévu, recopier et exécuter les codes demandés, et recopier les valeurs demandées dans votre copie.
- Les deux fichiers python devront être déposés sur avant LUNDI 29 avril à 7h45 ici :
  https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-vernet/transferts?phys

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Exercice n°1 Cycle de Lenoir

Le cycle de Lenoir est un modèle idéalisé de cycle moteur à deux temps, introduit par Lenoir en 1860 pour décrire le fonctionnement du moteur à gaz qu'il avait mis au point l'année précédente. On raisonne sur l'air présent dans la chambre de combustion du moteur, modélisé par un gaz parfait diatomique de capacité thermique molaire à volume constant $C_{Vm} = \dfrac{5}{2}R$. Après une phase d'admission d'air dans la chambre de combustion et le processus d'inflammation, l'air dans la chambre est caractérisé par $T_1 = 100\ °\text{C}$, $V_1 = 10$ L et $P_1 = 2.10^5$ Pa. À partir de cet état 1, l'air constitue un système fermé de quantité de matière n_0. Le cycle qu'il subit se compose des étapes suivantes :

- $1 \to 2$: explosion isochore jusqu'à la pression P_2 ;
- $2 \to 3$: détente isotherme jusqu'à un volume $V_3 = 2V_1$;
- $3 \to 1$: compression isobare jusqu'à revenir au volume initial.

Les gaz brûlés sont ensuite évacués hors de la chambre de combustion, et un nouveau cycle démarre.
On cherche à représenter le cycle dans le diagramme de Clapeyron (P, V). Pour pouvoir définir les grandeurs d'état tout au long des transformations, on raisonne sur des transformations quasi-statique.

Q1. Représenter le cycle dans le diagramme de Clapeyron (P, V).
Justifier rapidement le sens de chaque transformation.

Q2. Déterminer la température $T_2 = T_3$ à laquelle a lieu la détente isotherme, en fonction de T_1 uniquement.
En déduire la pression maximale atteinte P_2 que l'on exprimera en fonction de P_1 uniquement.
Faire les applications numériques.

Q3. Exprimer puis calculer la variation d'énergie interne et la variation d'enthalpie du gaz au cours de chaque étape du cycle, en fonction uniquement de P_1 et V_1. On les notera $\Delta_{12}U$, $\Delta_{23}U$, $\Delta_{31}U$ (et de même $\Delta_{ij}H$).

Q4. Calculer le travail reçu par le gaz au cours de chaque étape du cycle, en fonction uniquement de P_1 et V_1. On les notera W_{12}, W_{23} et W_{31}. Commenter les signes des différents travaux.

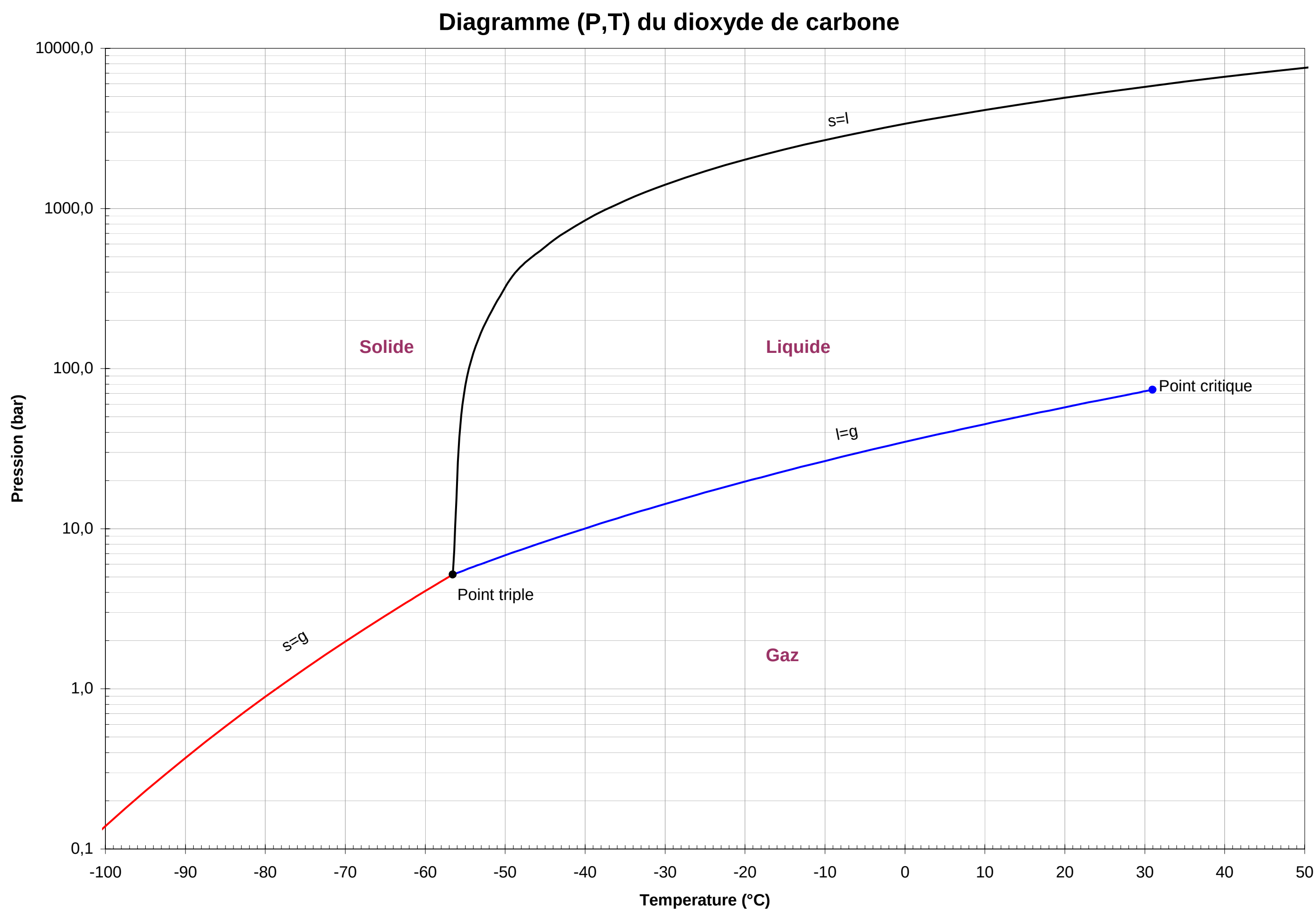
Q5. En utilisant la version adaptée à chaque situation du premier principe, calculer le transfert thermique reçu par le gaz au cours de chaque étape du cycle, en fonction uniquement de P_1 et V_1. On les notera Q_{12}, Q_{23} et Q_{31}. Commenter les signes des différents transferts thermiques.

Q6. En déduire le travail total reçu par le gaz au cours du cycle. Quel est son signe ?

Exercice n°2 Neige carbonique

Données

- Données sur le CO_2 :
  - Masse molaire : $M_{CO_2} = 44,0\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$
  - Masse volumique du CO_2 solide : $\rho = 1,50 \times 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
  - Capacité thermique massique à pression constante du CO_2 gazeux : $c_{P,CO_2(g)} = 840\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
  - Enthalpie massique de sublimation du CO_2 sous 1 bar : $\Delta_{sub} h_{CO_2} = 570,9\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Données sur l'eau :
  - Capacité thermique massique de l'eau solide : $c_{H_2O(s)} = 2,09\ \text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
  - Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_{H_2O(\ell)} = 4,18\ \text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
  - Enthalpie massique de fusion de l'eau à 0 °C, 1 bar : $\Delta_{fus} h_{H_2O} = 333,55\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$



Partie I Changement d'état

On considère une masse $m = 50$ g de CO_2 solide à la température de $T_1 = -78$ °C abandonné dans une pièce de température $T_p = 20$ °C à la pression atmosphérique prise à 1 bar.

Q1. Compte tenu du diagramme (P, T) du CO_2 fourni, quel changement d'état va-t-il subir ? Quelle est la température du changement d'état sous la pression de 1 bar ?

Q2. Déterminer le transfert thermique reçu par cette masse m de CO_2 au cours de la transformation.

Partie II Solidification de l'eau

On considère une tasse contenant $V_1 = 200$ mL d'eau liquide à $T_0 = 0$ °C.
On souhaite déterminer la masse m_2 de CO_2 solide à $T_1 = -78$ °C à placer dans l'eau pour obtenir de l'eau entièrement solide à $T_0 = 0$ °C.
On considère que la tasse est calorifugée.

Q3. Le CO_2 solide tombe-t-il au fond de l'eau ?

Q4. Décrire l'état final du système : état et température des différents constituants.

Q5. Exprimer la variation d'enthalpie de l'eau et du CO_2 au cours de la transformation.

Q6. Déterminer la masse $m_{\min}$ nécessaire pour obtenir dans le verre un glaçon d'eau à $T_0 = 0$ °C.

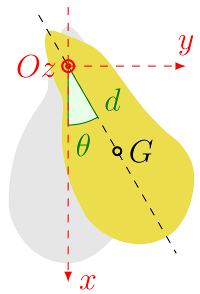
Q7. Que se passe-t-il si on ajoute une masse $m_2 < m_{\min}$? une masse $m_2 > m_{\min}$?

Partie III Refroidissement d'une boisson *(Partie plus difficile, facultative)*

Monsieur Boyron place dans sa tasse contenant $V_1 = 200$ mL d'eau liquide à $T_p = 20$ °C, un volume $V_2 = 1,5$ cm^3 de CO_2 solide à $T_1 = -78$ °C. Le verre étant ouvert sur l'extérieur, on peut considérer que la transformation a lieu à pression atmosphérique.
L'eau refroidie par le CO_2 reste au fond du verre, les bulles de CO_2 remontent en contact avec l'eau au-dessus du verre, qu'on suppose rester à la température T_p. Nous considérons donc que lorsque le CO_2 s'échappe du verre à l'état gazeux il est à la température T_P.
À la fin de l'opération on homogénéise l'eau.

Q8. Déterminer la température finale de l'eau.

Exercice n°3 Période d'un pendule pesant



On étudie un pendule pesant constitué d'un solide, de masse m, de moment d'inertie $J_{(Oz)}$ par rapport à l'axe (Oz) de rotation.
On suppose que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe (Oz). Et on néglige les frottements dus à l'air.
On repère la position du solide par l'angle θ que fait la droite (OG) avec la verticale descendante (Ox).
On note d la distance OG.

Partie I Mise en équation

Q1. Donner les expressions du moment cinétique scalaire et de l'énergie du pendule.

Q2. Établir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à un axe que l'on précisera.

Q3. Que devient-elle si les oscillations sont de faible amplitude ? Exprimer la période propre T_0 en fonction de m, g, d et J_{Oz}.

Partie II Période du pendule

On cherche à établir l'expression du pendule pesant dans le cas où les oscillations ne sont pas de faible amplitude.

Q4. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur du pendule en fonction de m, g, d et θ.

Q5. Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement du pendule.
Sachant qu'à $t = 0$, le pendule est lâché avec une vitesse angulaire nulle depuis l'angle $\theta_0 > 0$, montrer que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mgd\Big(\cos(\theta_0) - \cos(\theta)\Big)}{J_{Oz}}$$

La question suivante est facultative pour les étudiants les moins à l'aise.

Q6. Justifier que $\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2mgd}{J_{Oz}}}\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}$ sur $[0, T/2]$ et $\dot{\theta} = +\sqrt{\frac{2mgd}{J_{Oz}}}\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}$ sur $[T/2, T]$.
En déduire que la période du pendule s'exprime selon :

$$T = \frac{T_0}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}}$$

Soit

$$T = \frac{\sqrt{2}T_0}{\pi} \int_{0}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}}$$

Ce résultat pourra être admis pour la suite.

Partie III Intégration numérique

L'intégrale précédente ne peut pas être calculée analytiquement.

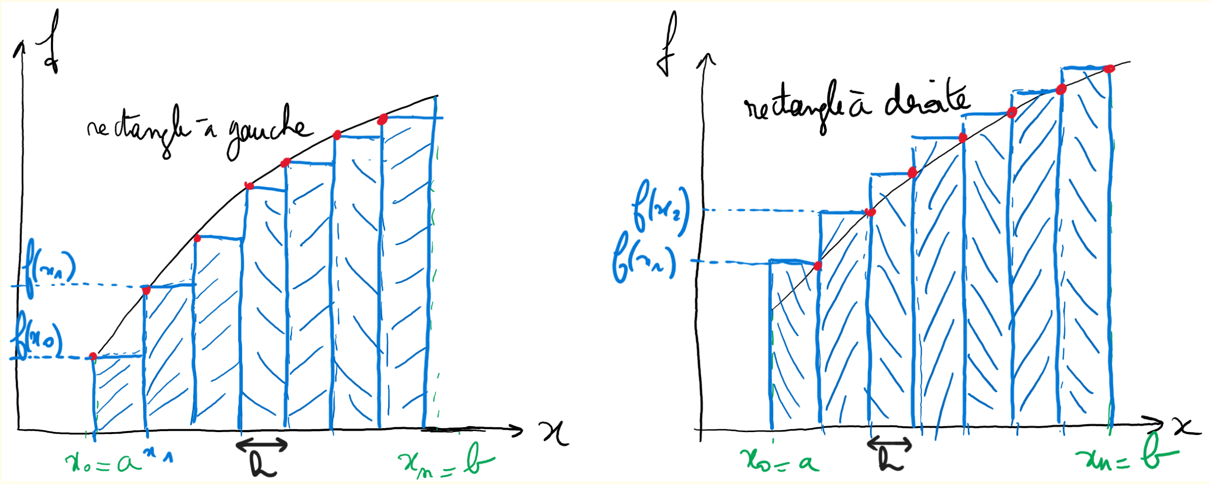
On cherche à calculer, pour différentes valeurs de θ_0, la valeur de $\dfrac{T}{T_0} = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\displaystyle\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}}$.

Méthode : Méthode des rectangles pour l'intégration numérique

On souhaite calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ de façon approchée.

On découpe l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de largeur constante $\dfrac{b-a}{n}$. Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note ces intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, où $x_i = a + i \times h$.
Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction f est approchée par une fonction g dont le calcul de l'intégrale est plus simple.À votre programme, vous avez la méthode des rectangles, pour laquelle on approxime la fonction f sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par une fonction constante :

- méthode des rectangles à gauche : f est approchée par sa valeur prise à la borne inférieure de l'intervalle.
- méthode des rectangles à droite : f est approchée par sa valeur prise à la borne supérieure de l'intervalle.
- méthode des rectangles au milieu : f est approchée par sa valeur prise au milieu de l'intervalle.



L'intégrale est alors approchée par la somme des aires de chaque rectangle, de largeur $h = \dfrac{b-a}{n}$.

- Pour la méthode des rectangles à gauche : $I \approx \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \Big(f(x_i) \times h\Big)$, soit $\boxed{I \approx h \times \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)}$, avec $x_i = a + i \times h$.
- Pour la méthode des rectangles à droite : $I \approx \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \Big(f(x_{i+1}) \times h\Big)$, soit $\boxed{I \approx h \times \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) = h \times \sum_{i=1}^{n} f(x_i)}$, avec $x_i = a + i \times h$.

Comment choisir n ?

- Le résultat est d'autant plus précis que n choisi est grand.
- Cependant de par la représentation des réels par des flottants en machine (en python : sur 64 bits), deux réels « trop proches » sont codés de la même façon (sur 64 bits, le plus petit écart entre deux réels codés distinctement est de 2×10^{-16}.
- La méthode des rectangles est de complexité linéaire en n, le temps de calcul reste donc raisonnable.

Q7. Recopier et compléter le code ci-dessous permettant de calculer la valeur approchée de

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}}$$

par la méthode des rectangle à gauche, c'est-à-dire en calculant la somme $S = h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \times h)$, où f est une fonction à identifier dans le cadre du problème étudié.

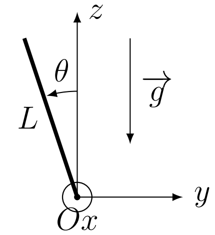
```
theta0 = #### valeur à choisir
n = #### nombre d'intervalles
a =       # (à compléter) : borne inférieure
b =       # (à compléter) : borne supérieure
h =       # (à compléter) : pas de calcul

S=        # (à compléter) : initialisation de la somme
for i in range(     ) : # (à compléter) :
    thetai =   # (à compléter) : borne inférieure de l'intervalle où on évalue la fonction à intégrer
    S =        # (à compléter) : calcul de la somme compte tenu de la fonction que l'on veut intégrer
S =    # (à compléter) : multiplication par le pas
rapport_T_T0 =    # (à compléter) : calcul du rapport T/T0
```

Q8. Recopier le code dans le fichier python `DM17_pendule_pesant.py`.
Calculer la période pour $n = 1000$. L'angle θ_0 est choisi aléatoirement par le programme.
Recopier la valeur obtenue pour le rapport $\dfrac{T}{T_0}$.

Q9. Compléter le code nécessaire au tracé de $\dfrac{T}{T_0}$ en fonction de θ_0.
Commenter l'évolution de $\dfrac{T}{T_0}$ avec θ_0.

Exercice n°4 Gravimètre

On étudie le pendule ci-contre, constitué d'une tige homogène de longueur L accrochée à sa base à un ressort spirale exerçant un couple $\Gamma = -C\theta$, de constante de torsion $C > 0$. Le moment d'inertie de la tige est noté J.



Partie I Mise en équation

Q1. Appliquer le théorème du moment cinétique scalaire pour obtenir l'équation différentielle du mouvement.

Q2. Montrer qu'à l'équilibre l'angle θ_e vérifie l'équation :

$$\sin(\theta_e) = \frac{2C}{mgL}\theta_e$$

L'écrire sous la forme $h(\theta_e) = 0$, on donnera l'expression de la fonction h.

Q3. Donner les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle de torsion. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale. Comment caractérise-t-on une position d'équilibre en terme d'énergie potentielle ?

Q4. Retrouver l'équation vérifiée par θ_e précédente.

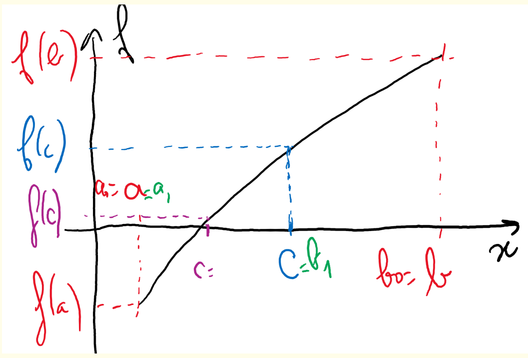
Partie II Résolution numérique

L'équation de la question Q2 ne peut être résolue analytiquement. On utilise la dichotomie.

Méthode : Résolution de $f(x) = 0$ par dichotomie

On considère une fonction $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$, qui change de signe sur l'intervalle.

On cherche la solution approchée à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$.



- On se place au milieu de l'intervalle $[a, b]$ ($c = (a+b)/2$) et on compare le signe de $f(a)$ avec le signe de $f(c)$ en regardant le signe de $f(a) \times f(c)$.
  - Si $f(a) \times f(c) < 0$, alors f s'annule sur l'intervalle $[a, c]$. Et on procède de la même façon sur ce nouvel intervalle.
  - Sinon, f s'annule sur l'intervalle $[c, b]$. Et on procède de la même façon sur ce nouvel intervalle.
- On procède ainsi jusqu'à un certain critère imposé, qui peut porter soit sur la largeur de l'intervalle de recherche (on cherche jusqu'à ce que $|b-a|$ devienne inférieur à un certain ε), soit sur la proximité de f à 0 (on cherche jusqu'à ce que $|f(c)|$ devienne inférieur à un certain ε).

Comment choisir l'intervalle $[a, b]$ de recherche ?

- Représenter la fonction f dont on cherche l'annulation ;
- Déterminer un intervalle pertinent, sur lequel f est strictement monotone et s'annule.

Q5. Recopier sur votre copie et compléter le code ci-dessous qui renvoie la valeur approchée c de l'annulation de f, à ε près.

```
def dichotomie(f,a,b,eps):
    while       # (à compléter) tant que |b-a| est supérieur à eps
        c =     # (à compléter) centre de l'intervalle
        if .... # (à compléter) f(a) et f(c) sont de signes opposés
           .... # (à compléter) f s'annule sur l'intervalle [..., ....]
       else:
          ..... # (à compléter) sinon, f s'annule sur [..,..]
    return c
```

Q6. Écrire en python la fonction `h(theta)` définie Q2.

Q7. Compléter le fichier python `DM17_gravimetre`.

Q8. À partir du graphique de $h(\theta)$, déterminer l'intervalle sur lequel appliquer la fonction `dichotomie`.

Q9. Écrire sur votre copie la ligne de code qui permet d'obtenir la valeur approchée de θ_e à 10^{-2} près en utilisant la fonction `dichotomie`.
Écrire cette ligne de code sur le fichier python, et l'exécuter.
Écrire sur votre copie la valeur de θ_e obtenue.

Q10. Expliquer comment ce système peut-il être utilisé comme mesure de g.