

? Lundi 08 avril 2024  
Devoir Surveillé n°9 (1) – Durée : 4 heures

La calculatrice est **AUTORISÉE**.

**Consignes à respecter**

- Lire la totalité de l'énoncé et commencer par les exercices les plus abordables.
- Présentation de la copie :
  - Prendre une **nouvelle copie double pour chaque exercice**.
  - Tirer un **trait horizontal** à travers toute la copie **entre chaque question**.
  - Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
  - Numérotter les pages sous la forme x/nombre total de pages.
- Rédaction :
  - Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
  - Justifier toutes vos réponses.
  - Applications numériques : nombre de **chiffres significatifs adapté** et avec une **unité**.

Ce sujet comporte 4 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 7 pages.

Le document réponse (page 8) est à détacher du sujet et à rendre avec votre copie.

**Données**

- Constantes :
  - Constante universelle de gravitation :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  uSI
  - Constante des gaz parfaits :  $R = 8,314$  J · K<sup>-1</sup> · mol<sup>-1</sup>

**Exercice n°0 Un peu de culture!**

- Q1. Quelle est l'altitude d'un satellite géostationnaire?
- Q2. Qu'est-ce que l'ISS? quelle est son altitude? la période de son mouvement autour de la Terre?

**Exercice n°1 Thermodynamique : Questions de cours (Durée : 15 min)**

- Q1. Donner l'expression générale du travail des forces de pression. Définir les différentes grandeurs, et en donner leurs unités.
- Q2. Comment peut-on l'écrire si la transformation est quasi-statique?
- Q3. Qu'est-ce qu'une transformation monotherme? isobare? adiabatique?
- Q4. Énoncer le premier principe (on attend l'énoncé général et complet).
- Q5. Donner l'expression de la variation de l'énergie interne d'un gaz parfait.

**Exercice n°2 Stockage du CO<sub>2</sub> dans les aquifères salins (Durée ~ 1 heure)**

**Données**

- Données sur le CO<sub>2</sub> :
  - Masse molaire :  $M_{CO_2} = 44,0$  g · mol<sup>-1</sup>
  - Masse volumique du CO<sub>2</sub> solide :  $\rho = 1,50 \times 10^3$  kg · m<sup>-3</sup>
- Données sur l'océan :
  - Masse volumique :  $\rho_o = 1,03 \cdot 10^3$  kg · m<sup>-3</sup>
  - Température :  $T_o = 280$  K
  - Pression à la surface de l'océan :  $P_o = 1,0$  bar

Les activités humaines ont accru sensiblement le taux de la concentration de CO<sub>2</sub> dans l'atmosphère : autour de 280 ppm il y a 250 ans, il est actuellement de 387 ppm (soit une augmentation de 38 %). Afin de ne pas dépasser la limite de 450 ppm au-delà de laquelle les conséquences les plus dramatiques du réchauffement climatique seront inévitables de nombreuses options sont envisagées afin de limiter les rejets de CO<sub>2</sub> dans l'atmosphère.

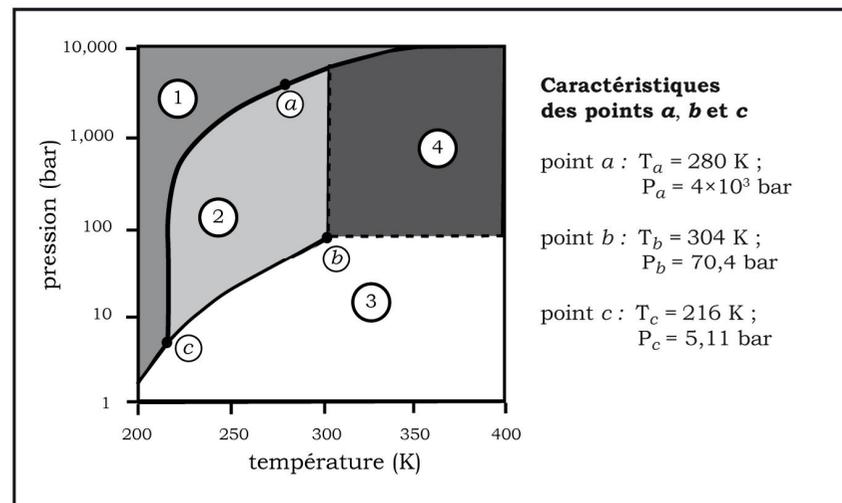
Une première proposition un peu simple (simpliste?) consiste à former des blocs de CO<sub>2</sub> solide à l'aide d'installations frigorifiques puis de les laisser tomber dans des fosses marines.

On effectue les approximations suivantes :

- L'océan est un fluide homogène au repos, de température constante, incompressible et indilatable.
- Les blocs de CO<sub>2</sub> sont incompressibles et indilatables. Ils ont de plus une masse constante tout au long de la descente dans la fosse (approximation forte).

**Partie I Condition de séquestration du CO<sub>2</sub> solide**

On propose le diagramme de phases du CO<sub>2</sub> :



- Q1. Donner le nom de l'état physique dans chacune des quatre zones 1, 2, 3 et 4.
- Q2. Donner les noms des points b et c et préciser leur particularité.
- Q3. Un morceau de dioxyde de carbone solide est laissé sur une paille dans un laboratoire. Ce solide est-il stable ou au contraire observe-t-on un changement d'état (préciser alors son nom) ?

Q4. Quelle doit être la pression minimale de l'eau pour que le CO<sub>2</sub> reste solide dans son emplacement de stockage ?

À la profondeur  $z$  du considéré, avec  $z = 0$  correspondant à la surface de l'océan, la pression qui y règne est de  $P(z) = P_o + \rho_o g_o z$  (cf cours de 1<sup>re</sup> et chapitre n°28 de PCSI).

Q5. Quelle doit être la profondeur minimale de la fosse marine pour que le bloc de CO<sub>2</sub> solide soit dans un état stable ? Commenter le résultat.

## Partie II Compression du CO<sub>2</sub>

Le diagramme de CLAPEYRON et des données thermodynamiques sont disponibles sur le **document réponse (Figure A)**.

Q6. Compléter le diagramme en indiquant les températures, et les états à l'équilibre. Tracer l'isotherme à  $T = 295$  K.

On considère une quantité  $n_o$  de CO<sub>2</sub>, assimilé à un gaz parfait, occupant un volume  $V_o = 10$  m<sup>3</sup> à une température  $T_o = 298$  K et une pression  $P_o = 1,0$  bar.

La quantité  $n_o$  de CO<sub>2</sub> gazeux est soumise à diverses transformations la faisant passer par les états A, B, C et D caractérisés par leur température et leur volume :

$$T_A = 280 \text{ K}; V_A = 120 \text{ L} \quad T_B = 280 \text{ K}; V_B = 53 \text{ L} \quad T_C = 295 \text{ K}; V_C = 53 \text{ L} \quad T_D = 310 \text{ K}; V_D = 53 \text{ L}$$

Q7. Calculer la masse de CO<sub>2</sub>, correspondant à la quantité de matière  $n_o$ .

Q8. Déterminer les volumes massiques du système à chaque état.

Q9. Placer les points A, B, C et D sur le diagramme de CLAPEYRON (**Document réponse figure A**) et préciser l'état physique du CO<sub>2</sub> pour chacun de ces états.

Q10. Préciser la pression pour chacun des états A, B, C et D.

Q11. Dans le cas de systèmes biphasiques, déterminer la composition massique du mélange (titre massique en vapeur, puis masse en vapeur et masse en liquide). On utilisera le diagramme de Clapeyron et le tableau de données thermodynamiques.

## Exercice n°3 Satellite de télédétection (Durée : 1h45)



La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et en cartographie.

Nous étudions dans ce sujet un satellite de télédétection en orbite autour de la Terre.

FIGURE 1 – Principe d'un satellite de télédétection (source : opticsvalley)

## Partie I Préliminaires

On étudie dans cette partie le mouvement du satellite, assimilé à un point matériel  $M$ , autour de la Terre de rayon  $R_T = 6,4 \cdot 10^3$  km et de centre  $O$ .

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  supposé galiléen au cours du temps noté  $t$ . L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindro-polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ .

On suppose que la trajectoire du satellite de masse  $m = 4,0 \cdot 10^3$  kg est plane et se fait dans le plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On rappelle que  $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et  $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$ .

Q1. La position du satellite est repérée par le point  $M$  de coordonnées  $(r(t), \theta(t), z = 0)$ . Déterminer l'expression du vecteur position  $\vec{OM}$  et du vecteur vitesse  $\vec{v}_M$  dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  en fonction de  $r, \theta$  et de leurs dérivées éventuelles.

On note  $g_o = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. Elle s'exprime en fonction  $G, M_T$  et  $R_T$  selon :  $g_o = \frac{GM_T}{R_T^2}$

Q2. Donner l'expression la force  $\vec{F}$  d'interaction exercée par la Terre sur le satellite en fonction de  $G, M_T, m, r$  et  $\vec{u}_r$ . L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive ?

En déduire son expression en fonction de  $m, g_o, R_T^2, r^2$  et  $\vec{u}_r$ .

Q3. Donner l'expression de l'énergie potentielle de l'interaction exercée par la Terre sur le satellite, en fonction de  $G, M_T, m$  et  $r$ , puis en fonction de  $m, g_o, R_T$  et  $r$ .

Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à  $\vec{F}$ .

Q4. Définir le moment cinétique du satellite par rapport à  $O$ .

Montrer que c'est un vecteur constant au cours du mouvement.

Puis, déterminer son expression dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ , puis sa norme  $L_O$  en fonction de  $r, \dot{\theta}$  et  $m$ .

## Partie II Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

- phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
- phase de satellisation : la satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon  $r$  constant autour de la Terre.

- Q5. Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse  $\vec{v}_M$  et le vecteur accélération  $\vec{a}_M$  du satellite uniquement en fonction de la quantité  $v = r\dot{\theta}$ , de sa dérivée temporelle  $\frac{dv}{dt}$ , de  $r$  et des vecteurs de la base cylindro-polaire.
- Q6. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que le mouvement est uniforme et exprimer  $v^2$  en fonction de  $g_0$ ,  $R_T$  et  $r$ .
- Q7. En déduire l'expression des énergies cinétique  $\mathcal{E}_c$  et mécanique  $\mathcal{E}_m$  du satellite en fonction de  $m$ ,  $g_0$ ,  $R_T$  et  $r$ . Justifier le signe de  $\mathcal{E}_m$ .
- Q8. Application numérique : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon  $r_b = 8,0 \cdot 10^3$  km, puis pour un rayon  $r_h = 40 \cdot 10^3$  km.

## Partie III Étude énergétique

On suppose ici que la trajectoire du satellite n'est pas nécessairement circulaire.

- Q9. Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et qu'elle se met sous la forme  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2mr^2} - mg_0 \frac{R_T^2}{r}$ .
- Q10. Exprimer l'énergie potentielle effective  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  et établir l'inégalité entre  $\mathcal{E}_m$  et  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  définissant les valeurs de rayon  $r$  accessibles.

Le graphe de  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  pour une valeur donnée de  $L_0$  est représenté figure 2 ci-contre.

On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

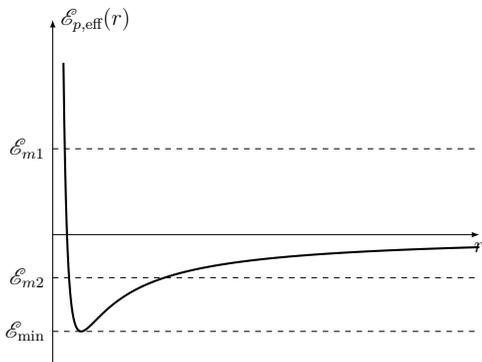


FIGURE 2 – Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de  $r$

- Q11. À quelle énergie  $\mathcal{E}_{m1}$  ou  $\mathcal{E}_{m2}$  peut correspondre une trajectoire elliptique ? une trajectoire hyperbolique ? Justifier la réponse.
- Q12. Pour quelle valeur particulière de  $\mathcal{E}_m$  la trajectoire est-elle circulaire ? Justifier la réponse.

## Partie IV Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse ( $r_b = 8,0 \cdot 10^3$  km), puis, dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute ( $r_h = 40 \cdot 10^3$  km) comme illustré sur la figure 3 ci-contre.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre  $O$  : son périégée  $P$  est situé sur l'orbite basse et son apogée  $A$  sur l'orbite haute.

Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

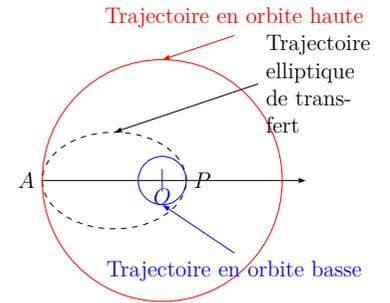


FIGURE 3 – Trajectoires du satellite

On considère désormais le satellite parcourant la trajectoire elliptique de transfert.

- Q13. Que peut-on dire des valeurs de  $\dot{r}$  lorsque le satellite est en  $A$  ( $r = r_h$ ) ou en  $P$  ( $r = r_b$ ) ? Comment s'exprime le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse de transfert en fonction de  $r_b$  et  $r_h$  ?
- Q14. (Question plus difficile) Montrer à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique que  $r_h$  et  $r_b$  sont solutions d'une équation du second degré de la forme  $r^2 + \alpha r + \beta = 0$ . Exprimer  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $m$ ,  $L_O$ ,  $\mathcal{E}_m$ ,  $g_0$  et  $R_T$ .
- Q15. En déterminant la somme des racines de l'équation, en déduire que

$$\mathcal{E}_{m,t} = -\frac{mg_0 R_T^2}{2a}$$

. Vous pouvez admettre ce résultat pour la suite.

- Q16. Relever sur la figure 4 la valeur de l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_{m,t}$  du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.

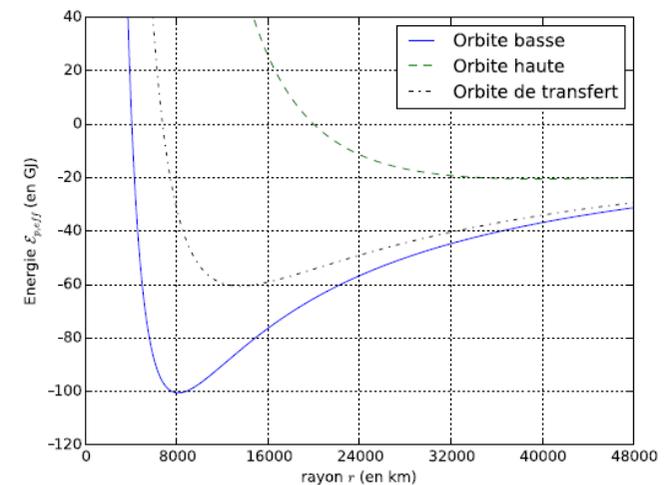


FIGURE 4 –  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  pour les trois orbites

- Q17. Relever sur la figure 4 la valeur de l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_{m,b}$  du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon  $r_b = 8,0 \cdot 10^3$  km. De même relever la valeur de l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_{m,h}$  du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon  $r_h = 40 \cdot 10^3$  km.
- Q18. En déduire la variation d'énergie mécanique  $\Delta\mathcal{E}_{m,P}$  à communiquer au satellite pour passer en  $P$  de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert.

## Exercice n°4 Pendule de torsion (Durée ~ 1 heure)

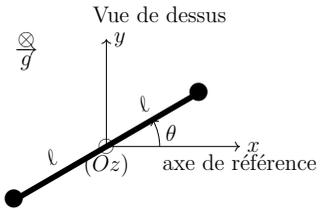
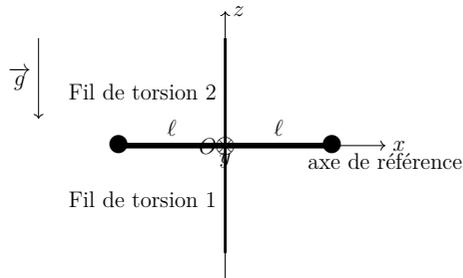
On réalise un pendule de torsion à l'aide de deux fils de torsion verticaux selon l'axe  $(Oz)$  (un en  $z > 0$  et un en  $z < 0$ ), chacun ayant une constante de raideur  $k$ .

On rappelle que, lorsque le fil est tordu d'un angle  $\theta$  il exerce par rapport à son axe (ici l'axe vertical  $(Oz)$ ) un couple de moment  $\mathcal{M} = -k\theta$ .

Entre ces deux fils de torsion est fixée une tige de longueur  $2\ell = 40$  cm parallèlement au sol du laboratoire (voir figure). Aux deux extrémités de cette tige son attachées deux masses.

On note  $I$  le moment d'inertie de l'ensemble {masses + tige} par rapport à l'axe vertical  $(Oz)$ .

Vue de face (en l'absence de torsion)



Le système évoluant dans l'air, on supposera que les masses sont chacune soumises à une force de frottements visqueux de la forme  $\vec{F}_f = -h\vec{v}$  où  $h$  est une constante positive et  $\vec{v}$  est la vitesse de la masse. On négligera les frottements s'exerçant sur la tige.

On notera  $\Omega = \dot{\theta}$  la vitesse angulaire de rotation.

### Équation du mouvement

- Q1. Donner l'expression du moment cinétique du système {masses + tige}.
- Q2. Faire un bilan précis des actions mécaniques s'exerçant sur le système étudié, et représenter les forces sur un schéma.
- Q3. Exprimer le moment résultant des deux forces de frottements fluides en fonction de  $h$ ,  $\ell$  et  $\Omega$ .  
*On vérifiera qu'il est nul.*
- Q4. Établir l'équation différentielle satisfaite par l'angle  $\theta(t)$  et la mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

en donnant les expressions de  $\tau$  et de  $\omega_0$  en fonction de  $I$ ,  $h$ ,  $\ell$  et  $k$ .

### Résolution de l'équation

À l'instant  $t = 0$ , le système est lancé de sa position de repos ( $\theta = 0$ ) avec une vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}_0$ . Les frottements sont suffisamment faibles pour que le régime d'oscillation du pendule de torsion soit pseudo-périodique.

- Q5. Dédire de l'hypothèse précédente une condition sur  $h$ .
- Q6. Déterminer alors la solution  $\theta(t)$  de l'équation différentielle (en fonction de  $t$ ,  $\omega_0$ ,  $\tau$  et  $\dot{\theta}_0$ ), puis tracer l'allure de sa représentation graphique.
- Q7. Justifier que lorsque le régime est très faiblement amorti (c'est-à-dire lorsque  $\tau \gg T_0$  où  $T_0$  est la période propre du système), la pseudo-période  $T$  est environ égale à  $T_0$ , et que la vitesse angulaire peut s'écrire

$$\Omega(t) \approx \dot{\theta}_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega_0 t)$$

### Étude énergétique

- Q8. Rappeler l'expression de l'énergie cinétique  $\mathcal{E}_c$  du système en fonction de  $I$  et  $\Omega$ .
- Q9. On définit l'énergie potentielle associée à un couple de forces conservatif par la relation :  $\mathcal{M} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}$  où  $\mathcal{M}$  est le moment du couple par rapport à l'axe de rotation.  
En déduire l'expression de l'énergie potentielle associée au couple de torsion.
- Q10. En déduire l'expression de l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m(t)$  du système, dans le régime de faible amortissement, en fonction du temps  $t$ , du moment d'inertie  $I$ , de  $\tau$  et de  $\dot{\theta}_0$ .