

? Lundi 08 avril 2024
Devoir Surveillé n°9 (2) – Durée : 4 heures

La calculatrice est AUTORISÉE.

⚠️ Consignes à respecter

- Lire la totalité de l'énoncé et commencer par les exercices les plus abordables.
- Présentation de la copie :
 - Prendre une **nouvelle copie double pour chaque exercice**.
 - Tirer un **trait horizontal** à travers toute la copie **entre chaque question**.
 - Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
 - Numérotter les pages sous la forme x/nombre total de pages.
- Rédaction :
 - Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
 - Justifier toutes vos réponses.
 - Applications numériques : nombre de **chiffres significatifs adapté** et avec une **unité**.

Ce sujet comporte 4 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 8 pages.

Le document réponse (page 9) est à détacher du sujet et à rendre avec votre copie.

Données

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante universelle de gravitation : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ uSI}$
- Unité de mesure de la pesanteur : $1 \text{ gal} = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$
- Ordre de grandeur de la sensibilité des gravimètres actuels : $\Delta g = 1 \text{ } \mu\text{gal}$

Exercice n°0 Un peu de culture !

1. Quelle est l'altitude d'un satellite géostationnaire ?
2. Qu'est-ce que l'ISS ? quelle est son altitude ? la période de son mouvement autour de la Terre ?

Exercice n°1 Thermodynamique : Questions de cours (Durée : 15 min)

- Q1. Donner l'expression générale du travail des forces de pression. Définir les différentes grandeurs, et en donner leurs unités.
- Q2. Comment peut-on l'écrire si la transformation est quasi-statique ?
- Q3. Qu'est-ce qu'une transformation monotherme ? isobare ? adiabatique ?
- Q4. Énoncer le premier principe (on attend l'énoncé général et complet).
- Q5. Donner l'expression de la variation de l'énergie interne d'un gaz parfait.

Exercice n°2 Stockage du CO₂ dans les aquifères salins (Durée ~ 45 min)

Données

- Données sur le CO₂ :
 - Masse molaire : $M_{\text{CO}_2} = 44,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
 - Masse volumique du CO₂ solide : $\rho = 1,50 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Données sur l'océan :
 - Masse volumique : $\rho_o = 1,03 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
 - Température : $T_o = 280 \text{ K}$
 - Pression à la surface de l'océan : $P_o = 1,0 \text{ bar}$

Les activités humaines ont accru sensiblement le taux de la concentration de CO₂ dans l'atmosphère : autour de 280 ppm il y a 250 ans, il est actuellement de 387 ppm (soit une augmentation de 38 %). Afin de ne pas dépasser la limite de 450 ppm au-delà de laquelle les conséquences les plus dramatiques du réchauffement climatique seront inévitables de nombreuses options sont envisagées afin de limiter les rejets de CO₂ dans l'atmosphère.

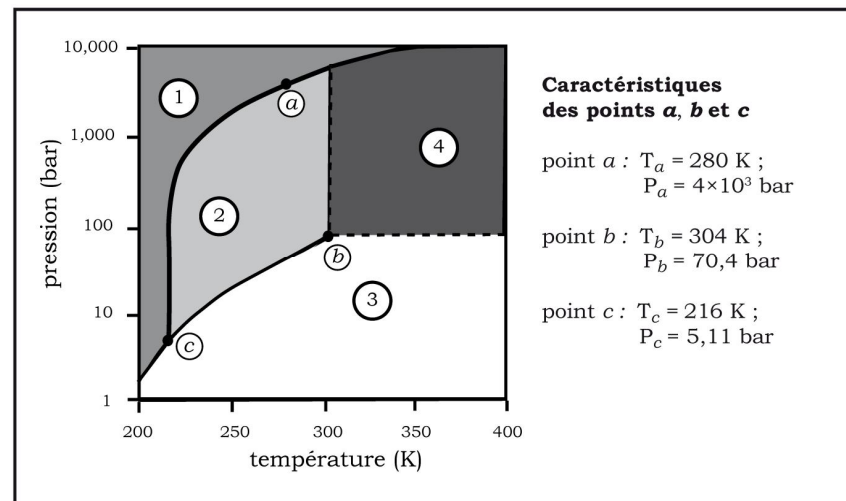
Une première proposition un peu simple (simpliste ?) consiste à former des blocs de CO₂ solide à l'aide d'installations frigorifiques puis de les laisser tomber dans des fosses marines.

On effectue les approximations suivantes :

- L'océan est un fluide homogène au repos, de température constante, incompressible et indilatable.
- Les blocs de CO₂ sont incompressibles et indilatables. Ils ont de plus une masse constante tout au long de la descente dans la fosse (approximation forte).

Partie I Condition de séquestration du CO₂ solide

On propose le diagramme de phases du CO₂ :



- Q1. Donner le nom de l'état physique dans chacune des quatre zones 1, 2, 3 et 4.
- Q2. Donner les noms des points b et c et préciser leur particularité.
- Q3. Un morceau de dioxyde de carbone solide est laissé sur une paille dans un laboratoire. Ce solide est-il stable ou au contraire observe-t-on un changement d'état (préciser alors son nom) ?

Q4. Quelle doit être la pression minimale de l'eau pour que le CO_2 reste solide dans son emplacement de stockage ?

À la profondeur z du considéré, avec $z = 0$ correspondant à la surface de l'océan, la pression qui y règne est de $P(z) = P_o + \rho_o g_o z$ (cf cours de 1^{re} et chapitre n°28 de PCSI).

Q5. Quelle doit être la profondeur minimale de la fosse marine pour que le bloc de CO_2 solide soit dans un état stable ? Commenter le résultat.

Partie II Compression du CO_2

Le diagramme de CLAPEYRON et des données thermodynamiques sont disponibles sur le **document réponse (Figure A)**.

Q6. Compléter le diagramme en indiquant les températures, et les états à l'équilibre. Tracer l'isotherme à $T = 295 \text{ K}$.

On considère une quantité n_o de CO_2 , assimilé à un gaz parfait, occupant un volume $V_o = 10 \text{ m}^3$ à une température $T_o = 298 \text{ K}$ et une pression $P_o = 1,0 \text{ bar}$.

La quantité n_o de CO_2 gazeux est soumise à diverses transformations la faisant passer par les états A, B, C et D caractérisés par leur température et leur volume :

$$T_A = 280 \text{ K}; V_A = 120 \text{ L} \quad T_B = 280 \text{ K}; V_B = 53 \text{ L} \quad T_C = 295 \text{ K}; V_C = 53 \text{ L} \quad T_D = 310 \text{ K}; V_D = 53 \text{ L}$$

Q7. Calculer la masse de CO_2 , correspondant à la quantité de matière n_o .

Q8. Déterminer les volumes massiques du système à chaque état.

Q9. Placer les points A, B, C et D sur le diagramme de CLAPEYRON (**Document réponse figure A**) et préciser l'état physique du CO_2 pour chacun de ces états.

Q10. Préciser la pression pour chacun des états A, B, C et D.

Q11. Dans le cas de systèmes biphasiques, déterminer la composition massique du mélange (titre massique en vapeur, puis masse en vapeur et masse en liquide). On utilisera le diagramme de Clapeyron et le tableau de données thermodynamiques.

Exercice n°3 Trous noirs (Durée ~ 1h35)

Un trou noir est une bulle d'espace-temps. Il peut se former lorsque la densité de matière est si grande que même la lumière ne peut plus s'échapper de l'attraction gravitationnelle. Ceci se produit lors d'effondrement d'étoiles (trous noirs stellaires de quelque fois la masse du Soleil) ou par des processus encore aujourd'hui partiellement incompris au centre des galaxies (trous noirs supermassifs de plusieurs millions à milliards de fois la masse du Soleil).

Ces objets sont décrits par la théorie de la relativité générale. Deux observations récentes sont venues confirmer les prédictions de cette théorie : l'observation presque directe du trou noir supermassif au centre d'une galaxie voisine, et l'observation d'ondes gravitationnelles.

Partie I Caractéristiques usuelles du mouvement dans un champ de gravitation

Nous établissons ici quelques résultats de base concernant les mouvements dans un champ de gravitation. On considère un corps de masse m en orbite autour d'un corps de masse m_o très grande situé à l'origine O du repère. Le corps de masse m est décrit par un point M . On note r la distance OM .

On rappelle que la force de gravitation exercée sur le point M s'écrit $\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ avec $\vec{e}_r$ un vecteur unitaire de O vers M .

Q1. Rappeler l'expression de la constante K apparaissant dans la force de gravitation.

Q2. Montrer que le moment cinétique en O de la masse m , noté $\vec{L}_O(M)$, est conservé au cours du mouvement.

Q3. On note $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire colinéaire à $\vec{L}_O$. Montrer qu'à tout instant, $\vec{OM}$ est perpendiculaire à $\vec{e}_z$, et donc que le mouvement est dans le plan Oxy .

Dans toute la suite on utilise les coordonnées polaires dans le plan du mouvement Oxy (vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$).

Q4. Montrer que la conservation du moment cinétique implique que la quantité $r^2 \dot{\theta}$ est constante au cours du mouvement. Comment interprète-t-on ceci géométriquement ?

On s'intéresse ensuite au cas du mouvement circulaire : la distance $R = OM$ est constante.

Q5. Montrer que le mouvement est circulaire uniforme.

Q6. Déterminer l'expression de la norme v de la vitesse en fonction de R, m_o et $\mathcal{G}$.

Q7. Donner l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle puis déterminer l'expression de l'énergie mécanique de la masse m en fonction de $\mathcal{G}, m_o, m$ et R , et donner son signe.

Partie II Modèle classique de trou noir

Cette partie propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille d'un trou noir dans un modèle qui utilise uniquement la théorie newtonienne.

On considère un astre de masse m_o et de rayon R , et un point M de masse m à sa surface.

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. Dans cette conception classique, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Q8. Donner l'expression du rayon d'un astre dont la vitesse de libération est égale à c . Ce rayon est aujourd'hui appelé rayon de Schwarzschild, noté R_S . En déduire la condition sur le rayon R d'un astre pour qu'il soit un trou noir.

Q9. Calculer numériquement R_S pour le Soleil ($M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$) et pour la Terre ($M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$)

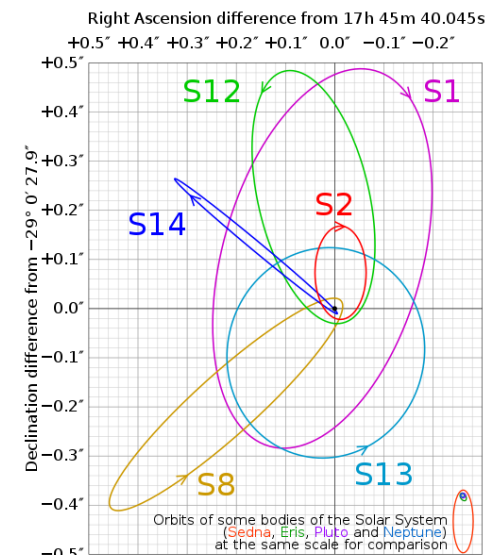
Notons que malgré des limites évidentes (théorie uniquement newtonienne, mécanique appliquée à un photon de masse nulle...), le rayon de Schwarzschild est bien la bonne expression (prédite par la théorie de la relativité générale) de la taille d'un trou noir sans rotation de masse m_o (en fait, c'est le rayon de son horizon, qui est une limite que l'on ne peut franchir que dans un sens).

Partie III Trou noir supermassif

Nous savons aujourd'hui que presque toutes les galaxies ont en leur centre un trou noir supermassif. C'est le cas de la voie lactée (qui est notre galaxie). Ce trou noir n'a pas été observé directement, mais nous avons une preuve indirecte de son existence : le suivi de la trajectoire d'étoiles proches du centre de la galaxie montre qu'elles orbitent autour d'un centre très massif.

Les observations permettent de connaître les périodes et demi-grand axes de chacune. Par exemple pour l'étoile S1 : $T = (94 \pm 9)$ années et $a = (3300 \pm 190) \text{ ua}$.

Une unité astronomique (ua) correspond à la distance moyenne Terre-Soleil, soit 150 millions de km, ou $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$.



Q10. En utilisant une loi de Kepler que vous rappellerez, estimer la masse du trou noir central. On fera l'application numérique avec un chiffre significatif.

Partie IV Fusion de trous noirs stellaires

Une autre confirmation éclatante de l'existence des trous noirs et de la précision de la théorie de la relativité générale est l'observation d'ondes gravitationnelles produites par la fusion de deux trous noirs. Cette partie s'intéresse à la trajectoire des deux trous noirs.

On considère deux corps, chacun de masse m , qui orbitent l'un autour de l'autre. On se place dans le repère centré sur le centre de masse O de l'ensemble. On supposera la trajectoire de chacun circulaire uniforme et plane dans ce repère.

On note M_1 le corps numéro 1, et M_2 le second. On note $R = OM_1$ et $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}_1}{OM_1}$ ainsi que $r = M_1M_2 = 2R$.

Q11. Exprimer la force exercée par le corps 2 sur le corps 1 en fonction de $\mathcal{G}$, m , R et $\vec{e}_r$.

Q12. Montrer que $v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m}{4R}}$ (norme de la vitesse du corps 1).

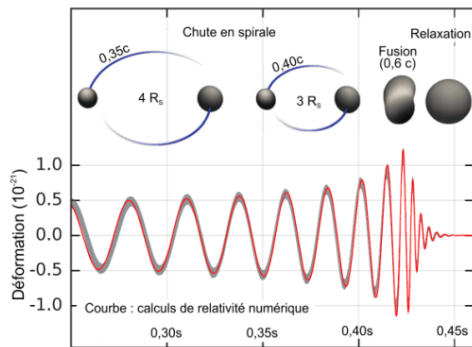
Q13. En déduire l'expression de la période T du mouvement en fonction de m , R et $\mathcal{G}$. On note $f = 1/T$ la fréquence associée. Montrer que $f^2 = \frac{\mathcal{G}m}{16\pi^2 R^3}$.

Q14. Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction associée à la force exercée par le corps 2 sur le corps 1.

Q15. La norme de la vitesse du corps 2 est la même que celle du corps 1. L'énergie mécanique totale du système est la somme de l'énergie cinétique de chaque corps, et de l'énergie potentielle d'interaction entre les deux corps obtenue à la question précédente. Montrer que cette énergie mécanique totale s'écrit $E_m = -\frac{\mathcal{G}m^2}{4R}$.

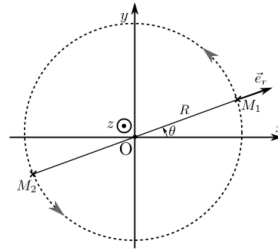
Q16. Montrer que l'énergie mécanique s'exprime selon : $E_m = -\alpha f^{2/3}$ avec $\alpha = \left(\frac{\pi\mathcal{G}}{2}\right)^{2/3} m^{5/3}$.

On s'intéresse au cas où les deux corps sont des trous noirs en rotation rapprochée l'un autour de l'autre. La théorie de la relativité générale prévoit que leur mouvement rapide déforme l'espace-temps et provoque ainsi l'émission d'ondes gravitationnelles à grande distance. Après un voyage de plusieurs milliards d'années dans l'espace, ces ondes peuvent être enregistrées sur Terre depuis 2015 à l'aide des interféromètres géants Ligo et Virgo situés aux États-Unis et en Italie. Ci-dessous figure le premier signal enregistré en 2015 et associé à la fusion de deux trous noirs superposé au signal prévu par la théorie de la relativité générale.



Le rayonnement d'ondes gravitationnelles emporte une partie de l'énergie du système : $E_m(t)$ décroît.

Q17. En vous basant sur les relations démontrées précédemment, prédire comment évolue la distance de séparation R , ainsi que la fréquence f du mouvement. Ceci est-il en accord avec l'enregistrement du signal de 2015 ?



La théorie de la relativité générale permet de prédire la puissance emportée par les ondes gravitationnelles :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\frac{2}{5} \frac{\mathcal{G}^4}{c^5} \frac{m^5}{R^5}$$

Q18. Montrer qu'on obtient l'équation différentielle suivante qui donne l'évolution de la fréquence f du mouvement : $\frac{df}{dt} = K f^{11/3}$, avec $K > 0$ une constante dont on ne cherchera pas à donner l'expression.

Q19. Résoudre cette équation pour exprimer $f(t)$ en fonction de K , f_0 et (f_0 est la fréquence à $t = 0$).

La connaissance de l'évolution de $f(t)$ permet ensuite de prédire la forme du signal reçu. Comme le montre la figure ci-dessus, la comparaison entre cette prédiction théorique et l'expérience est excellente (la prédiction théorique prend toutefois en compte des effets de relativité générale non mentionnés dans ce sujet). On peut alors en déduire les masses des trous noirs : dans le cas présent l'un de 29 et l'autre de 36 masses solaires, situés à 1,3 milliards d'années lumières de la Terre...

Exercice n°4 Gravimétrie (Durée ~ 1h25)

Partie I Méthodes de mesure du champ de pesanteur à l'aide de pendules

Pour déterminer le champ de pesanteur localement, les géophysiciens disposent d'instruments appelés gravimètres. Le premier gravimètre utilisé historiquement a été un pendule.

A Le pendule de Richter

Q1. Pourquoi l'utilisation d'un pendule simple permet-elle de remonter à la mesure de l'intensité du champ de pesanteur g ?

Q2. En 1672 l'astronome Richter part à Cayenne en Guyane avec une horloge à pendule réglée à Paris (pendule qui bat la seconde), il s'aperçoit qu'elle retarde de 2 min28 s par jour. En déduire la valeur de g à Cayenne (à Paris $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

B Le pendule vertical

La mesure de l'élongation d'un ressort vertical au bout duquel est suspendue une masse permet de mesurer les variations du champ de pesanteur. L'ingénieur Lucien LaCoste a inventé un ingénieux ressort à spirale de longueur au repos nulle (figure 1).

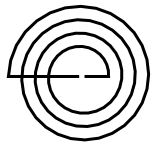


FIGURE 1

Q3. Si le champ de pesanteur terrestre varie de $10 \mu\text{gal}$, que vaut la variation de l'élongation d'un ressort usuel d'un laboratoire de lycée ?

Q4. Quel est l'intérêt d'utiliser un ressort de longueur au repos nulle ?

Partie II Gravimètre à fléau de LaCoste et Romberg

Le gravimètre de LaCoste et Romberg est un gravimètre qui permet de mesurer l'intensité du champ de pesanteur avec une incertitude typique de 1 microgal. Une tige de longueur a , de masse négligeable porte une masse m à l'une de ses extrémités et pivote sans frottement autour de l'axe Oz (figure 2). Le mouvement de la masse est repéré par l'angle θ , orienté par rapport à l'axe (Oz), il est donc positif sur la figure 2. La tige est retenue par un ressort de constante de raideur k , de longueur s et de longueur au repos s_0 . Ce ressort est fixé sur la tige à la distance b du point pivot. La longueur y peut être ajustée. Le dispositif est contenu dans un plan vertical, l'axe Oz est perpendiculaire à ce plan.



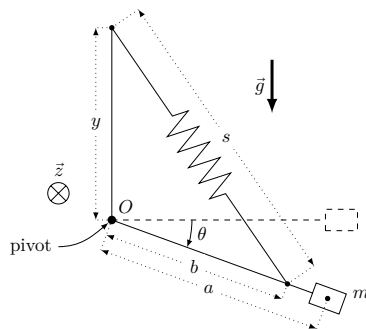


FIGURE 2

Q5. Expliquer le fonctionnement du gravimètre.

Q6. Pour le système gravimètre (tige + ressort + masse m), écrire l'expression de l'énergie potentielle totale E_p (pesanteur et élastique) du système en fonction de m, g, k, a, θ, s et s_0 .

Q7. Donner l'expression de s en fonction de y, b et θ .

Q8. Pour un mouvement de rotation pure le couple résultant Γ agissant sur la tige s'écrit $\Gamma = -\frac{dE_p}{d\theta}$.

Montrer que

$$\Gamma = \left(mga - kyb + \frac{kys_0}{\sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin \theta}} \right) \cos \theta$$

Q9. Ce ressort a été fabriqué de telle manière que sa longueur au repos s_0 soit nulle (figure 1). Montrer que l'on peut déterminer la valeur de l'intensité de la pesanteur g en annulant ce couple. Aurait-on pu utiliser un ressort «classique»?

Pour toute la suite, le ressort a une longueur au repos nulle. Dans la pratique, on incline le point de support du ressort d'un petit angle ϕ (figure 3).

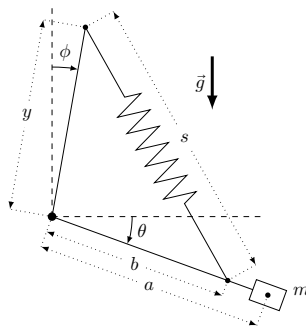


FIGURE 3

Q10. Exprimer s , puis l'énergie potentielle E'_p , en fonction de y, b, ϕ et θ .

Les courbes de la figure 4 représentent l'énergie potentielle en fonction de θ du système sans et avec inclinaison du ressort (pour une meilleure visualisation, les valeurs des paramètres utilisés pour tracer ces courbes sont différentes de celles du système réel).

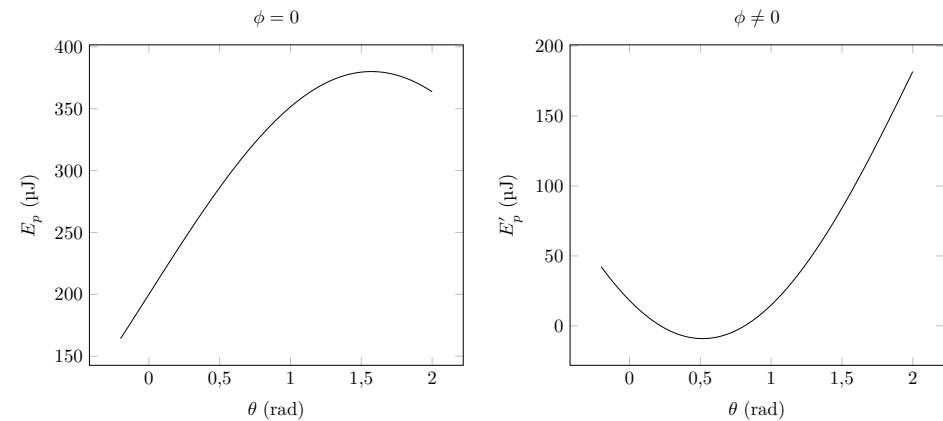


FIGURE 4

Q11. Quel est l'intérêt d'avoir incliné le ressort ?

Q12. Dans le cas où le point de support du ressort est incliné (figure 3), déterminer le nouveau couple Γ' résultant. Montrer qu'il s'écrit

$$\Gamma' = (mga - kyb \cos \phi) \cos \theta - kyb \sin \phi \sin \theta$$

Q13. Dans la pratique, l'angle θ reste petit. Écrire l'équation différentielle vérifiée par θ . On notera J le moment d'inertie de la tige et de la masse par rapport à l'axe Oz .

Q14. Déterminer la pulsation propre des oscillations et la position moyenne θ_0 . On ajuste la longueur y de manière à annuler la position moyenne pour $g = g_0$.

Q15. Application numérique. De quel angle ϕ doit-on incliner l'instrument pour obtenir des oscillations de période 20 s si $g_0 \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a \simeq b = 1,0 \text{ cm}$ et $J = ma^2$?

Q16. L'appareil est ensuite déplacé dans une zone où $g = g_0 + \Delta g$. Montrer que la nouvelle position moyenne θ'_0 est égale à $\theta'_0 = \frac{\Delta g}{g_0 \tan \phi}$.

Q17. Si le champ de pesanteur varie de 10 μgal quel est l'ordre de grandeur de la nouvelle position moyenne ? Commenter.