? À rendre le MARDI 21 mai 2024

Devoir Maison n°19

Travail à rendre :

- Vous traiterez tous l'exercice 1.
- Vous traiterez au choix l'exercice 2 (plus facile) ou l'exercice 3 (plus difficile).

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
- On rappelle que la variation d'entropie ΔS
  — d'un corps monophasé liquide ou solide de capacité thermique massique c et de masse m qui passe de la température initiale T_i à la température finale T_f vaut $\Delta S = m \cdot c \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$.
  — d'un gaz parfait de capacités thermiques molaires C_{Vm} et C_{Pm}, et de quantité de matière n qui passe de la température initiale T_i, de la pression initiale P_i, du volume initial V_i à la température finale T_f, à la pression finale P_f, au volume final V_f :

$$\begin{aligned}
\Delta S &= nC_{P,m}\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR\ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)\\
\Delta S &= nC_{V,m}\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)\\
\Delta S &= nC_{V,m}\ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) + nC_{P,m}\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)
\end{aligned}$$

Exercice n°1 Calculs élémentaires au cours de deux détentes

On étudie deux transformations différentes de n moles d'un gaz parfait diatomique de de rapport $\gamma = \frac{7}{5}$. L'état 1 est décrit par la pression $P_1 = 1$ bar, $V_1 = 3$ L et $T_1 = 20$ °C.

— La transformation $1 \to 2$ est une détente isobare à la pression P_1, au cours de laquelle le volume est multiplié par 3.

— La transformation $1 \to 3$ est une détente adiabatique réversible au cours de laquelle le volume est multiplié par 3.

Q1. Donner les expressions des capacités thermiques à volume et à pression constantes en fonction de n, R, γ, puis uniquement en fonction de n et R, et enfin en fonction de P_1, V_1 et T_1. Faire les applications numériques.

Q2. Exprimer les pressions, volumes et températures aux états 2 et 3 en fonction de P_1, V_1, T_1 et faire les applications numériques.

Q3. Pour chaque des deux transformations, exprimer les transferts thermiques (Q_{12} et Q_{13}) et les travaux (W_{12} et W_{13}) reçus par le gaz. Ils seront exprimés uniquement en fonction de P_1, V_1 et T_1. Faire les applications numériques.

Q4. Exprimer, puis calculer numériquement, la variation d'entropie, l'entropie échangée et l'entropie créée au cours de la transformation $1 \to 2$, en fonction de P_1, V_1 et T_1. Interpréter le signe de l'entropie créée.

Exercice n°2 Moteur de Stirling

Au début du XIX^{e} siècle, les chaudières des machines à vapeur, soumises à de trop fortes pressions, explosent assez souvent. Robert Stirling a ainsi imaginé en 1816 un moteur dépourvu de chaudière où la chaleur est apportée de l'extérieur de la machine (moteur à « air chaud»). L'utilisation de ce moteur restera limitée, en particulier en raison de la trop faible puissance des modèles proposés, insuffisante pour concurrencer la machine à vapeur et le moteur à combustion interne.

Le moteur Stirling bénéficie actuellement d'un nouvel intérêt car il présente de nombreux avantages. Il peut utiliser n'importe quelle source d'énergie produisant de la chaleur, combustion de tout matériau mais également énergie solaire, nucléaire, géothermique, etc. Il produit peu de vibrations et est silencieux (pas d'explosion interne ni d'échappement gazeux, absence de valves et soupapes). Grâce à l'utilisation de matériaux modernes qui supportent de grands écarts de température et qui améliorent les transferts thermiques, son rendement est comparable, voire supérieur à celui des moteurs à combustion interne. Son entretien est facile et il s'use moins que les moteurs à explosion. La conception d'un moteur Stirling est cependant délicate, en raison des gros écarts de température qu'il doit supporter et de la nécessité d'une excellente étanchéité ; son prix reste donc élevé. Par ailleurs, il est difficile de faire varier son régime. Son emploi reste ainsi cantonné à des utilisations de niches : générateur d'électricité en milieux extrêmes, propulseur pour sous-marins, etc. Sa réversibilité conduit à l'utiliser comme pompe à chaleur capable de refroidir à -200°C ou de chauffer à plus de 700°C.

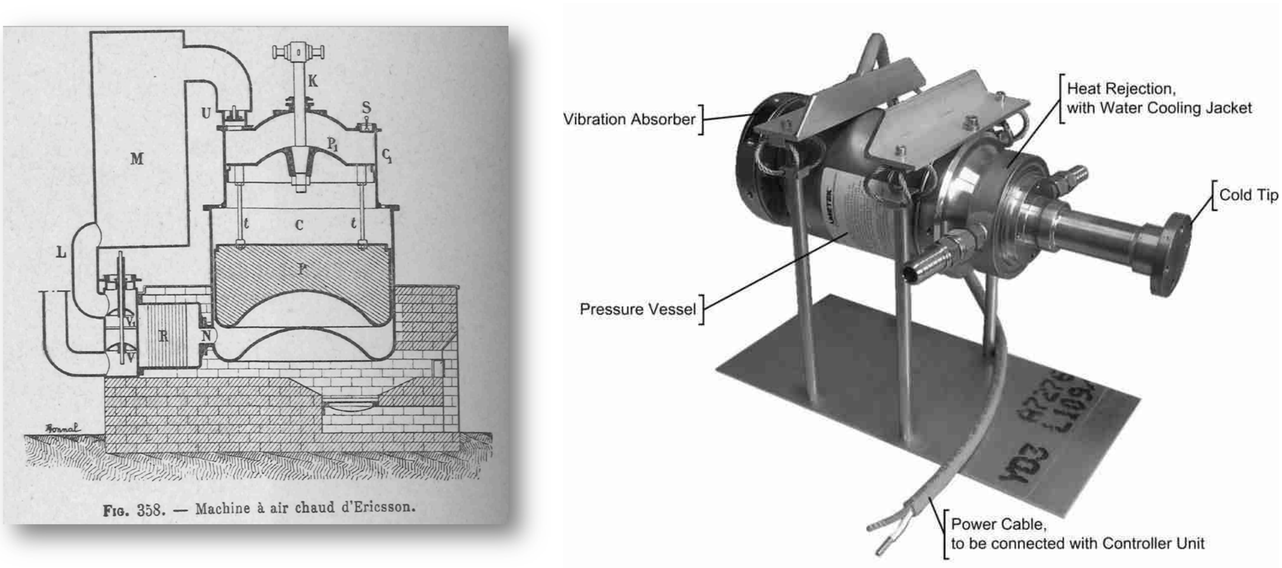

Figure 7 Gravure de 1899 d'un Moteur Ericsson M1851 avec régénérateur type Stirling (Wikipedia) et

FIGURE 1 – Gravure de 1899 d'un Moteur Ericsson M1851 avec régénérateur type Stirling (Wikipedia) et moteur Stirling de l'entreprise Sunpower fournissant le projet KRUSTY (ResearchGate)

Partie I Description du moteur

Une enceinte étanche est séparée en deux chambres, une chambre chaude (chauffée par l'extérieur), de volume maximal V_1, et une chambre froide équipée d'un dissipateur thermique (ailettes), de volume maximal V_2. Chaque chambre est dotée d'un piston permettant de faire varier son volume et le fluide peut circuler librement d'une chambre à l'autre. Le piston de la chambre froide est le piston de travail, il entraine le piston de la chambre chaude appelé « déplaceur » car son rôle est de faire circuler le fluide entre les deux chambres. Lors du transvasement, le fluide passe de la chambre chaude à la température T_3 à la chambre froide à la température $T_1 < T_3$ et réciproquement.

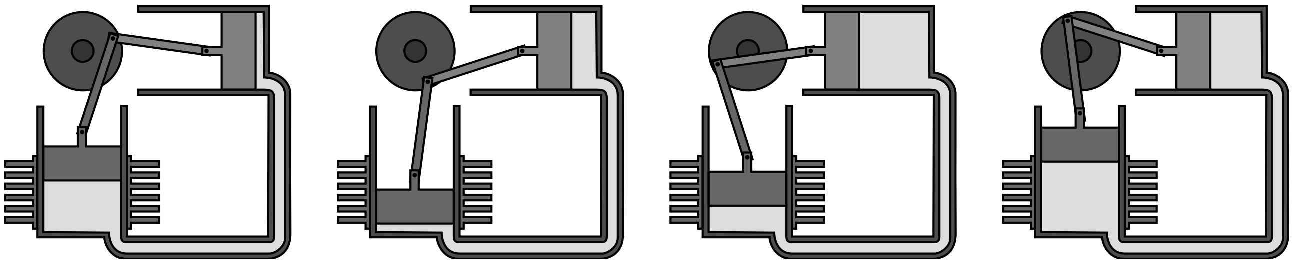

FIGURE 2 – Phases de fonctionnement d'un moteur Stirling de type alpha (d'après Wikipedia)

Le mouvement du gaz peut être décrit par 4 phases plus ou moins distinctes (figure 2) :

— une phase de compression, pendant laquelle le volume de la chambre chaude est minimal, le fluide, entièrement situé dans la zone froide, est comprimé par le piston de travail dans sa course vers le bas ;

— une fois le piston de travail au point mort bas, le déplaceur est ramené à gauche, ce qui a pour effet de transvaser le fluide comprimé, qui passe de la zone froide vers la zone chaude et reçoit un transfert thermique de la source externe ;

— une phase de détente, pendant laquelle le fluide se détend dans le volume d'expansion où il continue d'être chauffé. Cette détente a pour effet de repousser le déplaceur et le piston de travail ;

— une fois que le piston de travail a atteint le point mort haut, le déplaceur est ramené à droite, ce qui a pour effet de transvaser le fluide de la zone chaude (volume d'expansion) vers la zone froide (volume de compression). Au cours de ce transfert, le fluide cède de la chaleur au refroidisseur.

Un cycle réel d'un moteur de Stirling est représenté dans le diagramme (p, V) en figure 3 du document réponse.

Q1. Justifier que ce cycle est celui d'un moteur.

Q2. Estimer graphiquement la valeur du travail fourni par le moteur pendant un cycle.

Partie II Modélisation du cycle

On étudie le cycle de Stirling idéal. Au cours de celui-ci, n moles de gaz parfait de coefficient adiabatique γ subissent les transformations suivantes :

— une compression $(1 \to 2)$ isotherme réversible à la température T_1,

— un échauffement $(2 \to 3)$ isochore jusqu'à l'état 3 de température T_3,

— une détente $(3 \to 4)$ isotherme réversible à la température T_3,

— un refroidissement $(4 \to 1)$ isochore jusqu'à l'état 1 .

Il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression.

Q3. Représenter sur la figure 3 du document réponse, à rendre avec la copie, l'allure du diagramme correspondant au cycle idéal.

On note $r = \dfrac{V_1}{V_2}$ le rapport de compression entre les volumes fixés par construction. On rappelle que la capacité thermique à volume constant d'un gaz de n moles de gaz parfait vaut $C_\mathrm{V} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$ où R est la constante des gaz parfaits.

Q4. Exprimer W_{12}, le travail reçu par le fluide au cours de la compression, en fonction de n, R, T_1 et r. En déduire le transfert thermique Q_{12} reçu par le fluide au cours de cette compression en fonction de n, R, T_1 et r. Préciser les signes de W_{12} et de Q_{12}.

Q5. Exprimer Q_{23}, le transfert thermique reçu par le fluide au cours de l'échauffement isochore, en fonction de n, R, T_1, T_3 et γ. Préciser son signe.

Q6. Exprimer W_{34}, le travail reçu par le fluide au cours de la détente, en fonction de n, R, T_3 et r. En déduire le transfert thermique Q_{34} reçu par le fluide au cours de cette détente en fonction de n, R, T_3 et r. Préciser les signes de W_{34} et Q_{34}.

Q7. Exprimer le transfert thermique Q_{41} reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de n, R, T_1, T_3 et γ. Préciser son signe.

Partie III Rendement du moteur

Q8. Définir puis exprimer le rendement idéal du moteur en fonction de T_1, T_3, r et γ.

Q9. Définir et exprimer le rendement de Carnot en fonction de T_1 et T_3.

En réalité, le moteur de Stirling utilisé dans le projet KRUSTY contient un régénérateur. Dans ce cas, la chaleur perdue par le gaz lors du refroidissement isochore $(4 \rightarrow 1)$ est récupérée par le gaz lors du chauffage isochore $(2 \rightarrow 3)$. Si le régénérateur est idéal, cette récupération est totale.

Q10. Que devient le rendement du cycle idéal dans ce cas ?

Dans les conclusions du test de la NASA du dispositif KRUSTY réalisé en 2018, les ingénieurs indiquent que l'efficacité des moteurs a évolué pendant l'expérience entre 30% et 50% de l'efficacité de Carnot. De plus, pour les deux moteurs combinés, la puissance électrique obtenue est d'environ 180 W.

Q11. En prenant une température chaude de 640°C et une température froide de 60°C et en supposant la conversion du travail mécanique en travail électrique parfaite, estimer numériquement la puissance thermique fournie par la source chaude aux deux moteurs de Stirling combinés.

Document réponse à rendre avec votre copie

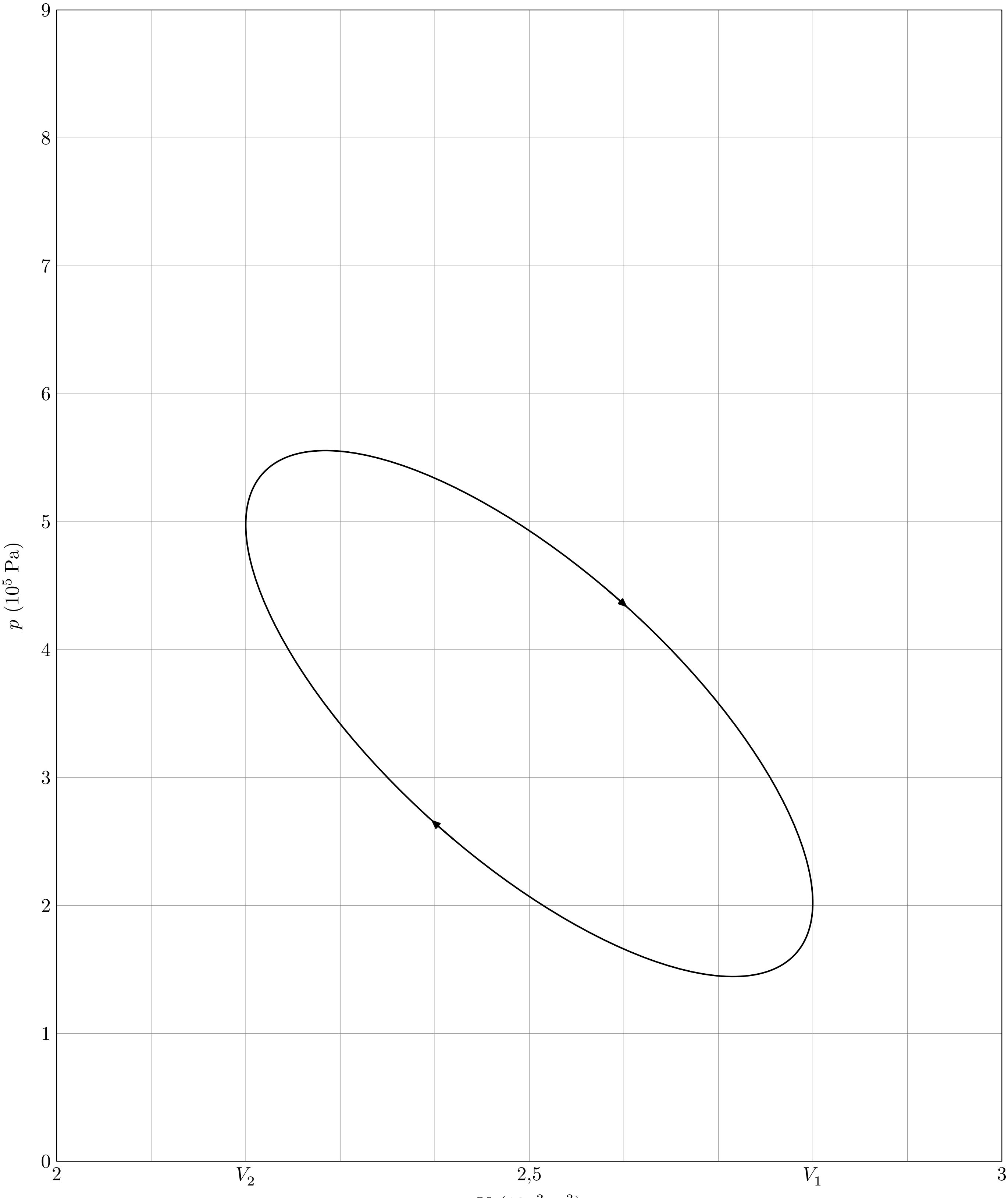

FIGURE 3 – Allure du cycle réel d'un moteur Stirling dans le diagramme (p, V)

.

Exercice n°3 Utilisation d'une pompe à chaleur

- Tous les murs donnent sur l'extérieur
- Température intérieure : $T_0 = 20,0$ °C, supposée uniforme
- Température extérieure : $T_1 = 5,0$ °C, supposée uniforme
- Capacité thermique de la pièce : $C = 3,0 \cdot 10^5$ J $\cdot$ K^{-1}
- Puissance développée par la pompe à chaleur : $\mathscr{P} = 300$ W
- Le premier principe pour un système fermé immobile dans le référentiel d'étude, dont on étudie une transformation infinitésimale entre deux instants t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$$

avec au cours d'une transformation isochore $\mathrm{d}U = C(T(t+\mathrm{d}t) - T(t)) \approx C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$

Un point important dans une maison est la qualité des appareils de chauffage. On s'intéresse ici à l'étude du fonctionnement d'une pompe à chaleur et de son efficacité.

L'intérieur de la maison est chauffé grâce à une pompe à chaleur cyclique ditherme, ce qui permet notamment de compenser les pertes thermiques de la maison. L'intérieur de la maison tient lieu de source chaude à la température T_0 et l'extérieur de la maison tient lieu de source froide à la température T_1.

Le système considéré est alors le fluide caloporteur contenu dans la pompe à chaleur. Les transformations qu'il subit sont supposées réversibles.

On suppose pour le moment qu'il n'y a aucune perte thermique entre la maison et l'extérieur.

Q1. Faire un schéma de principe de la pompe à chaleur en représentant le système fluide, la source chaude, la source froide, le travail W fourni au fluide par le moteur de la pompe à chaleur et les transferts thermiques Q_C et Q_F, reçus algébriquement par le fluide de la part, respectivement, de la source chaude et de la source froide. On précisera le signe de ces transferts algébriques.

Q2. L'efficacité ε d'une pompe à chaleur est donnée par le rapport $\varepsilon = \frac{-Q_C}{W}$. Justifier cette expression.

Q3. Exprimer l'efficacité de la pompe à chaleur en fonction de T_0 et T_1. Calculer numériquement ε.

Le système pris en compte maintenant est l'air contenu à l'intérieur de la maison. On ne considère comme échanges d'énergie que le transfert thermique Q_C apporté par la pompe à chaleur et le transfert thermique Q' dû aux déperditions d'énergies.

On ne considère plus le régime comme stationnaire. On cherche ici à évaluer les pertes thermiques.

On note $\delta Q' = -aC\,(T - T_1)\,\mathrm{d}t$ le transfert thermique algébrique et élémentaire avec l'extérieur pendant $\mathrm{d}t$, avec C la capacité thermique de la pièce et a une constante positive.

La température de la pièce étant initialement T_0, la pompe est arrêtée. La pièce se refroidit et la température tombe à $T_f = 15$ °C au bout de 3 heures.

Q4. Commenter le signe de $\delta Q'$. Qui reçoit effectivement ce transfert thermique ? Déterminer l'unité de a.

Q5. En appliquant le premier principe infinitésimal à l'intérieur de la maison, la pompe à chaleur étant éteinte, montrer qu'on obtient une équation différentielle du premier ordre sur la température de la forme

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + aT(t) = B$$

avec B une constante à déterminer.

Q6. Résoudre cette équation pour exprimer l'évolution de $T(t)$.

Q7. En déduire l'expression de a. Faire l'application numérique.

Une fois la température T_f atteinte, on met de nouveau en marche la pompe à chaleur. La température $T(t)$ dans la pièce évolue au cours du temps.

On note la durée $\mathrm{d}t$ d'un cycle, qui est suffisamment courte pour pouvoir considérer qu'à l'échelle du cycle la température de la pièce n'a pas évolué.

Q8. Donner la relation liant la puissance $\mathscr{P}$ développée par le moteur de la pompe au travail δW fourni par celui-ci pendant une durée $\mathrm{d}t$.

Q9. Établir l'expression du transfert thermique δQ_C reçu par le fluide de la pompe à chaleur sur un cycle en fonction de ε, $\mathscr{P}$ et $\mathrm{d}t$, puis en fonction de T, T_1, $\mathscr{P}$ et $\mathrm{d}t$.

Q10. Déterminer la nouvelle équation différentielle portant sur $T(t)$ en appliquant le premier principe infinitésimal et montrer qu'elle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + aT - \frac{\mathscr{P}}{C}\frac{T}{T-T_1} = aT_1$$

Q11. Déterminer l'équation vérifiée par T_∞ en régime permanent (en supposant qu'il existe).

En déduire que la puissance doit valoir $\mathscr{P} = aC\dfrac{(T_0-T_1)^2}{T_0}$ pour que la température T_∞ soit égale à T_0.

Q12. Rappeler le principe de la méthode d'Euler pour résoudre numériquement des équations différentielles du premier ordre.

Q13. Écrire l'équation différentielle sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = f(T)$, et identifier la fonction f.

L'intervalle de résolution est découpée en n intervalles de largeur h. On note T_i la température à l'instant t_i, avec $i \in [\![0, n]\!]$.

Q14. Établir la relation de récurrence reliant T_{i+1} à T_i pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ dans le cadre de la méthode d'Euler.

Q15. Recopier et compléter le code ci-dessous. On suppose que toutes les constantes : `a`, `C`, `P`, `Tf`, `T0` et `T1` ont été définies, ainsi que les instants de début `t0` et de fin `tf` de résolution, et le nombre d'intervalles `n` de résolution.

```
h = # (à compléter) pas de temps
Ti=Tf # initialisation de la variable qui contiendra les températures
   successives
T=[T0] # liste des températures
for i in range(   ) : # (à compléter)
    Ti= # (à compléter) calcul de la température à l'instant suivant
        # (à compléter) ajout de la température à la liste T
```

Q16. Commenter la courbe obtenue :