SESSION 2024

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE – FILIÈRE PCSI

PHYSIQUE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Données

- Constantes :
  - Champ de pesanteur terrestre : $g = 9,81\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
  - Constante des gaz parfaits : $R = 8,314\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$
- On rappelle que la variation d'entropie ΔS
  - d'un corps monophasé liquide ou solide de capacité thermique massique c et de masse m qui passe de la température initiale T_i à la température finale T_f vaut $\Delta S = m \cdot c \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$.
  - d'un gaz parfait de capacités thermiques molaires C_{Vm} et C_{Pm}, et de quantité de matière n qui passe de la température initiale T_i, de la pression initiale P_i, du volume initial V_i à la température finale T_f, à la pression finale P_f, au volume final V_f :

$$\begin{aligned}
\Delta S &= nC_{P,m}\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR\ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)\\
\Delta S &= nC_{V,m}\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)\\
\Delta S &= nC_{V,m}\ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) + nC_{P,m}\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)
\end{aligned}$$

- L'eau est caractérisée par les valeurs regroupées dans le tableau ci-dessous :

	Masse volumique ρ à 0 °C	Capacité thermique c massique à 0 °C
Eau à l'état liquide	$1000\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$	$c_\ell = 4 \cdot 10^3\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$
Eau à l'état solide	$917\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$	$c_g = 2 \cdot 10^3\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$

  Le point triple de l'eau correspond à la température $T_t = 273,16$ K et à la pression $P_t = 0,06$ bar.

  L'équilibre solide $\rightleftarrows$ liquide de l'eau a lieu à $T_{\text{fusion}} = 273,15$ K pour la pression atmosphérique $P^0 = 1$ bar.

  Le point critique de l'eau correspond à la température $T_c = 647,15$ K et à la pression $P_c = 218$ bars.
- L'enthalpie massique de fusion de la glace vaut $\Delta h_{\text{fusion}} = L = 333\ \mathrm{kJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.
- Les masses atomiques molaires en $\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$ valent 1 pour l'hydrogène et 16 pour l'oxygène.
- **Aides de calculs :**
  - $\ln(2) < 1$
  - $\frac{343}{2\pi} \approx 55$
  - $\frac{1.89}{3955} \approx 4,8.10^{-4}$
  - $\sqrt{4,8} \approx 2,2$

Première partie

Thermodynamique (∼ 2 heures)

Les deux exercices de cette partie sont entièrement indépendants.

Exercice n°1 Étude d'un cycle d'un gaz parfait (∼ 1 heure)

On étudie un cycle de trois transformations subies par n d'un gaz parfait diatomique de coefficient isentropique $\gamma = \dfrac{7}{5} = 1,4$.

- À l'état A, le volume vaut V_A, la température T_A et la pression P_A.
- La transformation $A \longrightarrow B$ est une compression isobare. Le volume est divisé par 2.
  La transformation a lieu au contact d'un thermostat de température $T_t = T_B$.
- La transformation $B \longrightarrow C$ est une compression isochore, qui l'amène à une pression double de celle en B.
- La transformation $C \longrightarrow A$ est une détente isotherme.
  La transformation a lieu au contact de l'atmosphère de température $T_{\text{atm}} = T_A$.

Q1. Donner les expressions des capacités thermiques à volume constant et à pression constante en fonction de n, R et γ, puis en fonction de n et R uniquement.

Q2. Représenter le cycle subit par le gaz dans le diagramme de Clapeyron (P en fonction de V).

Q3. Exprimer P_B et P_C en fonction de P_A uniquement.
Exprimer V_B et V_C en fonction de V_A uniquement.
Enfin, exprimer T_B et T_C en fonction de T_A uniquement.

Q4. On étudie la transformation $A \rightarrow B$:
  (a) Établir l'expression du travail W_{AB} algébriquement reçu par le gaz en fonction de n, R et T_A. Commenter le signe.
  (b) Établir l'expression du transfert thermique Q_{AB} algébriquement reçu par le gaz en fonction de n, R et T_A. Commenter le signe.
  (c) Exprimer la variation d'entropie du gaz au cours de cette transformation en fonction de n et R.
  (d) Exprimer l'entropie échangée $S_{e,AB}$ algébriquement reçue par le gaz en fonction de n et R.
  (e) En déduire l'entropie créée $S_{c,AB}$. Quel est son signe ? commenter.

Q5. On étudie la transformation $B \rightarrow C$:
  (a) Que vaut le travail W_{BC} reçu algébriquement par le gaz ?
  (b) Établir l'expression du transfert thermique Q_{BC} algébriquement reçu par le gaz en fonction de n, R et T_A. Commenter le signe.
  (c) Exprimer l'entropie échangée $S_{e,BC}$ algébriquement reçue par le gaz.
  (d) En déduire l'entropie créée $S_{c,BC}$. Commenter.

Q6. On étudie la transformation $C \rightarrow A$:
  (a) Exprimer le travail W_{CA} algébriquement reçu par le gaz en fonction de n, R et T_A. Commenter le signe.
  (b) En déduire l'expression du transfert thermique Q_{CA} algébriquement reçu par le gaz en fonction de n, R, et T_A. Commenter le signe.
  (c) Exprimer l'entropie échangée $S_{e,CA}$ algébriquement reçue par le gaz.
  (d) En déduire l'entropie créée $S_{c,CA}$. Commenter.

Exercice n°2 Eau et glace *(∼ 1 heure)*

Q1. Tracer l'allure du diagramme d'état de l'eau avec en abscisse la température et en ordonnée la pression en indiquant les phases stables dans les différents domaines.

Q2. Calculer numériquement le transfert thermique reçu par $m = 1$ kg d'eau qui passe, à la pression atmosphérique P^0, de la température initiale $\theta_i = 4$ °C à la température finale $\theta_f = -10$ °C.

L'eau peut assez facilement présenter du retard à la solidification quand l'eau se refroidit à pression constante : le phénomène s'appelle surfusion. Dans le cas de l'eau, la phase liquide métastable peut se maintenir de 0 °C à −39 °C ; mais le contact avec un objet fait se solidifier au moins partiellement l'eau de façon rapide et irréversible.

Le verglas est un dépôt mince et lisse de glace issue d'eau de pluie en surfusion.

Q3. Pourquoi peut-on considérer la solidification d'une eau en surfusion comme adiabatique ? isenthalpique ?

Q4. En supposant que l'eau de pluie est à $\theta = -10$ °C et qu'elle évolue vers un état biphasé à 0 °C à l'arrivée au sol, quelle proportion x en masse de glace obtient-on ?

Ensuite, les transferts thermiques ont le temps de se faire avec le sol considéré comme un thermostat de température $\theta_{\text{sol}} = -10$ °C.

L'eau passe alors de l'état biphasé de la question Q4 à l'état monophasé stable en équilibre thermique avec le sol.

Q5. Quel est l'état final de l'eau ?

Q6. Calculer le transfert thermique reçu par l'eau par unité de surface quand le sol se recouvre d'une épaisseur $e = 1$ mm de verglas.

Q7. Faire un bilan entropique littéral pour $m = 1$ kg d'eau qui passe de l'état surfondue à $\theta = -10$ °C à l'état solide à $\theta_f = -10$ °C en exprimant :
  (a) la variation d'entropie de l'eau,
  (b) la création d'entropie de l'eau. Peut-on prévoir son signe ? Si oui, quel serait-il ? Pourquoi ?

Les deux questions suivantes sont de type « résolution de problème », un raisonnement détaillé et rigoureux est attendu. Tout élément de raisonnement correct, même partiel, sera récompensé.

On place dans une tasse constituée de deux couches de métal séparées par de l'air. Sur une durée d'une heure, on peut la considérer comme calorifugée. Vous versez 200 mL de jus de fruit sortant du réfrigérateur (à 5 °C) et un glaçon de 10 g sortant du congélateur (à −18 °C) dans cette tasse.

On modélise le jus de fruit par de l'eau.

On suppose qu'à l'état final, tout est liquide.

Q8. En rédigeant très rigoureusement, établir l'expression de la température du contenu de la tasse une fois l'équilibre atteint.

Q9. Pour refroidir 200 mL de jus de fruits à 25 °C, est-il plus efficace d'ajouter de l'eau liquide à 0 °C ou la même quantité d'eau solide à 0 °C ? On pourra commencer par une réponse qualitative, puis on effectuera une justification quantitative.

Deuxième partie

Isolation phonique (∼ 2 heures)

Les deux parties sont indépendantes.

I Isolation acoustique (∼ *1 heure*)

Cette partie s'intéresse à l'isolation acoustique d'un double vitrage, notamment en la comparant à celle d'un simple vitrage.

I.1 Présentation de l'isolation acoustique du simple vitrage

Sur la figure 1, la courbe en trait tireté représente l'atténuation acoustique d'un simple vitrage en fonction de la fréquence de l'onde sonore incidente. La fréquence $f \approx 3000$ Hz, autour de laquelle on constate une baisse d'atténuation, est appelée fréquence critique de la vitre. On peut en obtenir une expression à l'aide d'une analyse de mécanique des fluides, qui ne sera pas faite ici.

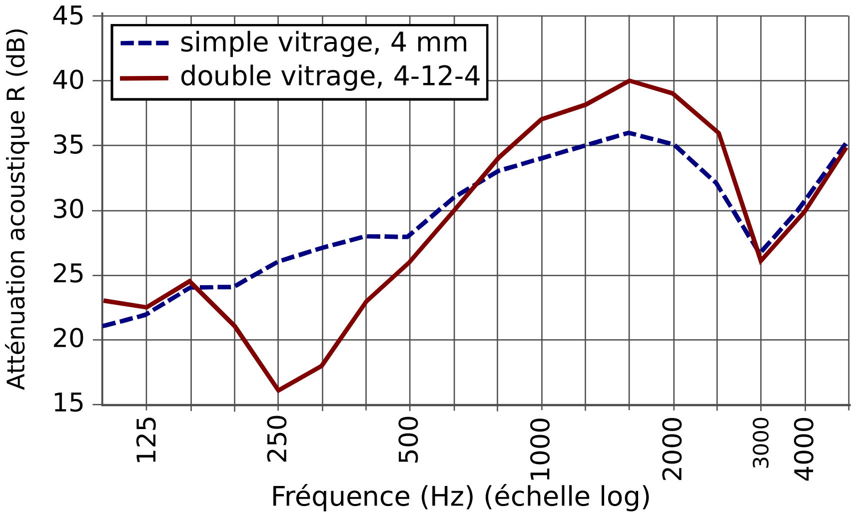


FIGURE 1 – Atténuation par un simple vitrage (vitre de 4 mm) et un double vitrage (vitre de 4 mm, vide de 12 mm, vitre de 4 mm). L'échelle verticale est en décibels, mais il n'est pas nécessaire d'en connaître la définition : simplement, plus l'atténuation en décibels est importante, plus l'onde sonore transmise est d'amplitude faible.

Q1. Rappeler la gamme de fréquences audibles par l'être humain.

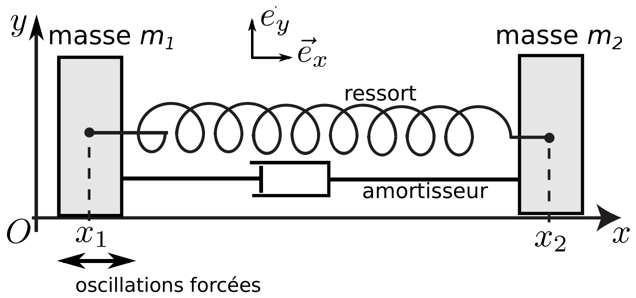
I.2 Double vitrage : étude en régime forcé

La figure 1 montre également la courbe d'atténuation acoustique du double vitrage (en trait plein). Elle présente deux baisses d'atténuation : une vers 250 Hz et une vers 3000 Hz.

Q2. Comment s'explique la baisse d'atténuation vers 3000 Hz ?

La présence de la baisse d'atténuation vers 250 Hz, absente pour le simple vitrage, montre que le double vitrage est globalement moins performant que le simple vitrage. Nous allons étudier l'origine de cette baisse. Pour cela, on modélise le double vitrage comme deux masses m_1 et m_2 qui représentent chacune une vitre. La lame d'air qui sépare les deux vitres est modélisée par un ressort (pour son rôle élastique de transmission des vibrations) associé à un amortisseur visqueux (pour rendre compte de la dissipation).

- Le ressort possède une longueur à vide ℓ_0 et une constante de raideur k.
- L'amortisseur exerce sur la masse 2 une force $\overrightarrow{f} = -\alpha\,(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\,\overrightarrow{e_x}$ avec α une constante et $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$ les vitesses des masses.
- Une onde sonore incidente force la vitre 1 à osciller selon $x_1(t) = A\cos(\omega t)$.



Q3. Donner l'expression de la force $\overrightarrow{F}$ qu'exerce le ressort sur la masse 2, en fonction de ℓ_0, k, x_1, x_2 et du vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$.

Q4. Établir l'équation différentielle suivie par la position $x_2(t)$ de la masse 2.

Q5. On pose $u_2(t) = x_2(t) - \ell_0$. En partant de la question précédente, montrer que $u_2(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 = \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 \tag{1}$$

avec ω_0 et Q des paramètres dont on donnera les expressions en fonction de m_2, k et α.

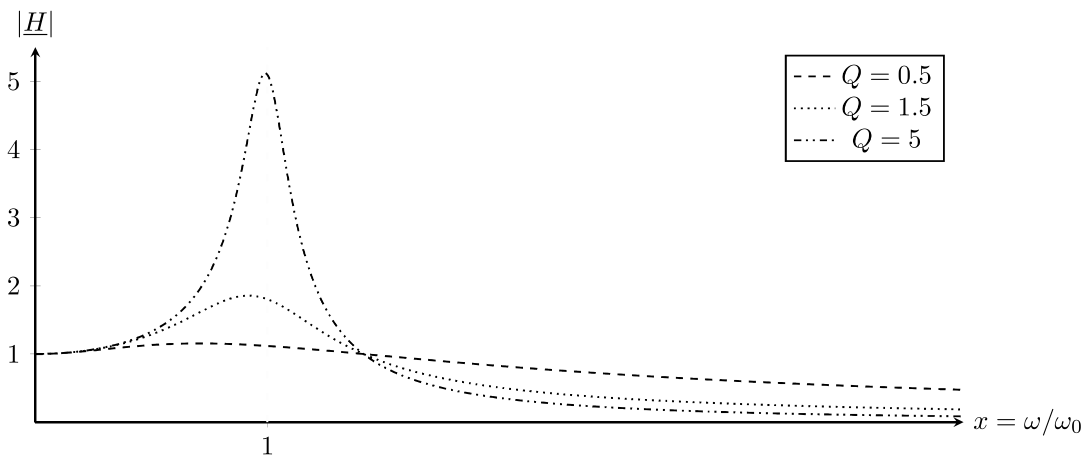
Dans la suite on travaille à partir de l'équation (1). On utilise le formalisme complexe, où une grandeur du type $u_2(t) = U_0\cos(\omega t + \varphi)$ est représentée par la grandeur complexe $\underline{u}_2(t) = \underline{U}_0 \mathrm{e}^{j\omega t}$ avec $\underline{U}_0 = U_0\mathrm{e}^{j\varphi}$ l'amplitude complexe associée (où $j^2 = -1$).

On voit l'ensemble du double vitrage comme un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{u}_2}{\underline{x}_1}$.

Q6. Donner l'expression de $\underline{H}$, notamment en fonction de ω, ω_0 et Q.

Q7. Donner l'expression du gain $G = |\underline{H}|$ du filtre.

On introduit la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$. Le graphique ci-dessous montre l'évolution de $|\underline{H}|$ en fonction de x pour différentes valeurs de Q.



Q8. Comment s'appelle le phénomène qui se manifeste ici par un maximum marqué sur la courbe de gain ?

Q9. On souhaite obtenir la position du maximum de la courbe $|\underline{H}|(x)$. Pour les valeurs élevées de Q qui nous concernent ici, le numérateur de $|\underline{H}|$ ne varie pas beaucoup autour du maximum. Le maximum est donc atteint lorsque le dénominateur est minimum. On admet que ce dénominateur s'écrit $D(x) = \sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}$.

Établir, en suivant la démarche décrite ici, la position x du maximum de $|\underline{H}|(x)$ en fonction de Q.

Indiquer également à quelle condition sur Q ce maximum existe.

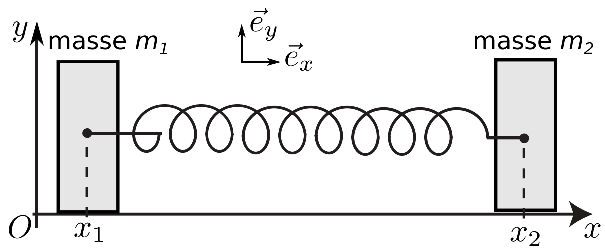
Q10. Que peut-on dire de la position de ce maximum si Q est assez grand (de l'ordre de 10 par exemple) ?

I.3 Détermination plus fine de la fréquence de résonance

Les questions qui précèdent expliquent la présence de la baisse d'atténuation du double vitrage à basses fréquences : pour ces fréquences, l'ensemble vitre-air-vitre entre en résonance et laisse passer l'onde sonore. Nous avons montré que la pulsation de résonance est donnée (quasiment) par la pulsation propre ω_0 du système.

Notre expression de ω_0 n'est toutefois pas correcte, car elle ne prend en compte que la masse de la seconde vitre. Or celle de la première doit aussi intervenir, car sa mise en mouvement par l'onde sonore incidente en dépend. Pour obtenir la bonne expression, il faut déterminer la pulsation des oscillations d'un système masse 1-ressort-masse 2 en oscillations libres. On considère donc un tel système.

On note $\ell = x_2 - x_1$ la longueur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. Il est initialement comprimé d'une quantité δ : $\ell(t=0) = \ell_0 - \delta$, puis il est relâché sans vitesse initiale à $t = 0$. On néglige ici toute force de frottement et on ne considère que l'action du ressort, du poids et de la réaction normale du support sur les masses.



Q11. Établir l'équation différentielle suivie par la position $x_1(t)$ de la masse m_1, puis celle suivie par la position $x_2(t)$ de la masse 2.

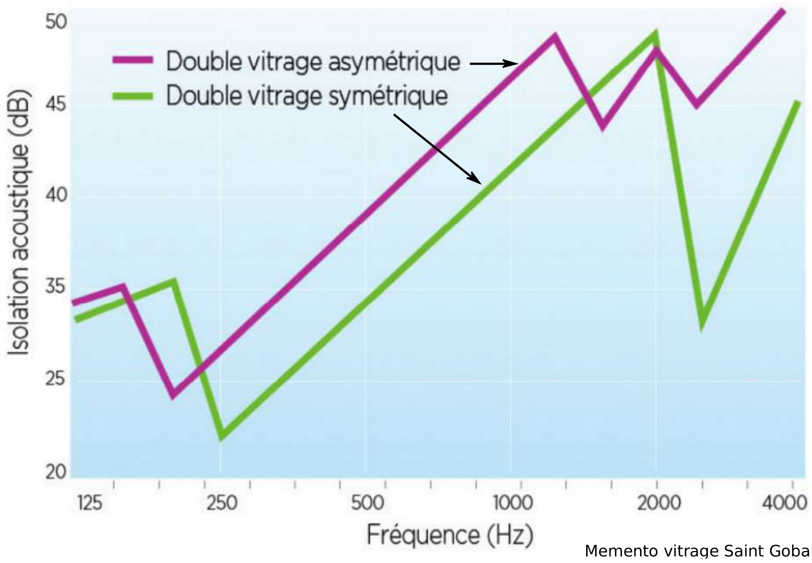
Q12. En déduire une équation différentielle portant sur la longueur $\ell(t)$.

Q13. En déduire l'expression de la pulsation ω_0 des oscillations en fonction de m_1, m_2 et k.

Q14. Établir la solution $\ell(t)$ de cette équation différentielle.

C'est cette pulsation qui correspond à la résonance d'un double vitrage. On trouve en effet dans les guides acoustiques la formule suivante pour la fréquence de résonance : $f_r = 84 \times \sqrt{\frac{1}{d}\left(\frac{1}{m'_1} + \frac{1}{m'_2}\right)}$ avec f_r la fréquence en hertz, d la distance entre les vitres en mètres (dont dépend la raideur du ressort équivalent), et m'_1 et m'_2 les masses surfaciques des vitrages en kg/m^2.

Q15. Si on souhaite envoyer le pic de résonance vers les basses fréquences hors du domaine de l'audible, que faut-il faire concernant les masses des vitres ?



Memento vitrage Saint Gobain

Q16. Revenons sur le problème du creux d'atténuation vers $f \approx 3000$ Hz. Cette fréquence critique est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la vitre. La courbe ci-dessous représente schématiquement l'atténuation d'un double vitrage asymétrique (vitres de 4 mm et 8 mm). Expliquez pourquoi les creux d'atténuation liés aux fréquences critiques sont plus faibles.

II Principe d'un silencieux à résonateur de Helmholtz (∼ 2 heures)

Dans un système de renouvellement d'air, de l'air vicié est aspiré et de l'air neuf insufflé dans la pièce à traiter. Entre l'aspiration et le soufflage, l'air a traversé des éléments générateurs de bruits (ventilateur, gaines ...) qui peuvent parfois s'avérer gênants.

Si un traitement acoustique de la pièce ne peut être envisagé, d'autres solutions sont possibles pour réduire l'impact du bruit généré par un système de renouvellement d'air. L'une d'elles consiste à insérer des silencieux le long des réseaux de gaines, munis entre autres de résonateurs de Helmholtz. On modélise un résonateur de Helmholtz par une cavité de grand volume V_c, reliée à l'air libre par l'intermédiaire d'un col cylindrique horizontal d'axe $(O, \overrightarrow{u_x})$, de très faible section s et de longueur ℓ (figure 2). Sous l'effet d'une perturbation, on considère que l'air situé dans le col oscille en bloc, à l'image d'un bouchon qui coulisserait.

On note $x(t)$ le déplacement du centre d'inertie de cette tranche d'air à l'instant t par rapport à sa position à l'équilibre, $p_c(t)$ la pression supposée uniforme dans la cavité, ρ_0 la masse volumique de l'air dans le col, supposée égale à tout instant à celle de l'air libre à la pression atmosphérique p_0.

On néglige tout phénomène dissipatif et on considère que l'air dans la cavité, de comportement supposé parfait, évolue de façon isentropique.

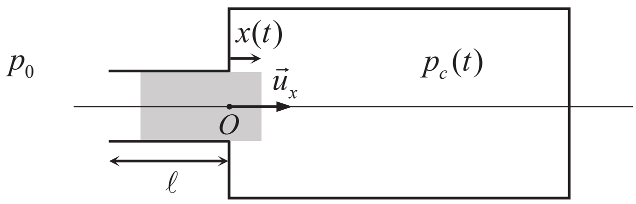


FIGURE 2 – Modélisation d'un résonateur de Helmholtz. La zone grisée représente la tranche d'air qui oscille

Q17. Exprimer la résultante $\overrightarrow{F_p}$ des forces pressantes sur la tranche d'air en fonction de p_0, $p_c(t)$ et s.
En supposant que le volume de la tranche d'air est très petit devant le volume de la cavité, montrer que $p_c(t) \simeq p_0 \left(1 + \dfrac{\gamma s x}{V_c}\right)$ au premier ordre, où γ est le rapport entre les capacités thermiques à pression et volume constants de l'air.
En déduire que la résultante des forces pressantes sur la tranche d'air est équivalente à une force de rappel élastique de raideur k.
Exprimer k en fonction de V_c, s, ρ_0 et de la célérité c des ondes sonores dans l'air.
On donne l'expression de la célérité des ondes sonores dans l'air : $c = \sqrt{\dfrac{\gamma p_0}{\rho_0}}$

Q18. Montrer que la tranche d'air dans le col oscille de façon harmonique, et exprimer la fréquence propre f_0 de ce système oscillant en fonction de c, s, ℓ et V_c.

Un résonateur expérimental est constitué d'un cylindre en PVC de volume $V_c = 791\ \mathrm{cm}^3$, fermé à ses deux extrémités. L'une de ces extrémités est percée de façon à insérer un col cylindrique de section $s = 1,89\ \mathrm{cm}^2$ et de longueur $\ell = 5,0$ cm. Un microphone de petite taille, relié à un oscilloscope à mémoire, est inséré dans le grand volume. En engageant légèrement l'index dans le col et en le retirant brusquement, on enregistre le signal suivant (figure 3). Les conditions de l'expérience sont telles que $c = 343\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

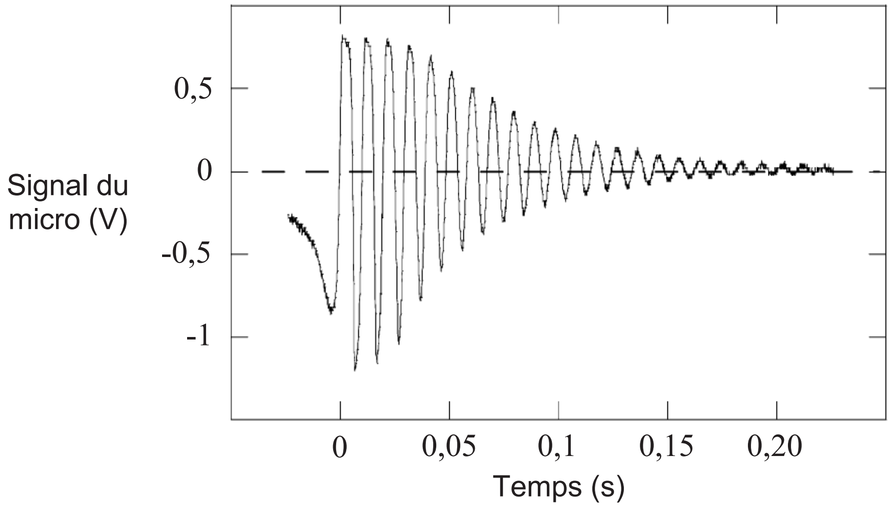


FIGURE 3 – Oscillations libres d'un résonateur de Helmholtz Source : Bulletin de l'Union des Physiciens, volume 96, Juin 2002

Q19. Quelle serait la nature du signal attendu dans le cadre du modèle considéré dans les questions précédentes ? Comment expliquer la différence avec le signal enregistré ? Estimer le facteur de qualité Q du résonateur.

Q20. Compte tenu de l'estimation de Q à la question précédente, que peut-on dire sur la fréquence d'oscillation comparativement à la fréquence propre ?

Comparer la valeur mesurée de cette fréquence à celle déduite du modèle utilisé.

En fait, les couches d'air situées de part et d'autre du col sont aussi entraînées dans le mouvement. Expliquer en quoi leur prise en compte permet d'affiner la modélisation.

Un haut-parleur, relié à un générateur basse fréquence, impose désormais à l'entrée du col une surpression variant de façon sinusoïdale à la pulsation ω, de la forme $p(t) = p_m \cos(\omega t)$. La pression à l'entrée du col est donc égale à $p_0 + p(t)$. On associe à cette pression acoustique la grandeur complexe $\underline{p}(t) = p_m \mathrm{e}^{j\omega t}$ où $j^2 = -1$. On cherche une réponse de la tranche d'air de la forme $\underline{x}(t) = \underline{x}_m \mathrm{e}^{j\omega t}$ en régime forcé en restant dans le cadre du modèle développé dans Q17 et Q18.

Q21. Établir l'expression de $\underline{x}(t)$. En déduire que la vitesse de la tranche d'air dans le col s'écrit en représentation complexe : $\underline{v}(t) = \underline{v}_m \mathrm{e}^{j\omega t}$ où $\underline{v}_m = \dfrac{j\omega p_m}{\rho_0 \ell \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$.

Que dire de $|\underline{v}_m|$ dans le cas où $\omega = \omega_0$?

En pratique, $|\underline{v}_m|$ reste borné. Expliquer pourquoi.