

? À rendre le jeudi 21 novembre 2024

## Devoir Maison n°7 : Étude parasismique d'un gratte-ciel

### Travail à faire :

- Sokhna, Apollinaire, Thibault, Abderrahman, Edgar, Matthieu, Razane, Avénie doivent faire la totalité du sujet.
- Pour les autres, les questions Q1, Q2, Q13 sont facultatives.

La construction parasismique (ou anti-sismique) regroupe l'étude du comportement des bâtiments et structures sujets à un chargement dynamique du type sismique et la réalisation de bâtiments et infrastructures résistant aux séismes. Les objectifs principaux de la construction parasismique sont de comprendre l'interaction entre les bâtiments ou autres infrastructures de génie civil et le sol ; prévoir les conséquences potentielles des tremblements de terre et, finalement, concevoir et construire des structures résistant aux tremblements de terre, conformément aux normes de construction locales.

Les tremblements de terre représentent des sources très énergétiques (un gros séisme libère une énergie qui peut être 2 ordres de grandeur au-delà de celle des plus importantes explosions nucléaires) et les mouvements associés aux ondes élastiques se propageant dans le manteau peuvent être mesurés à la surface. Les plus gros tremblements de Terre excitent un spectre très large de vibrations allant de  $3,0 \cdot 10^{-4}$  Hz à 20 Hz. Dans cette gamme de fréquence, on distingue classiquement les ondes longue-période, de fréquence inférieure à 0,1 Hz, et les ondes courte-période, de fréquence supérieure à 1 Hz.

De part leur très grande taille, les gratte-ciel sont des bâtiments particulièrement sensibles aux séismes et une étude dynamique de leurs propriétés est nécessaire. Nous allons appuyer notre étude sur le Burj Khalifa, situé à Dubaï aux Émirats arabes unis, qui est depuis 2009 la plus haute tour du monde, avec ces 830 mètres. Sa structure est basée sur un ensemble de poutres en acier représentant une masse totale de  $m \approx 4000$  tonnes sur une hauteur maximale de  $h \approx 800$  mètres.

### Partie 1 Modélisation simple de l'élasticité du bâtiment

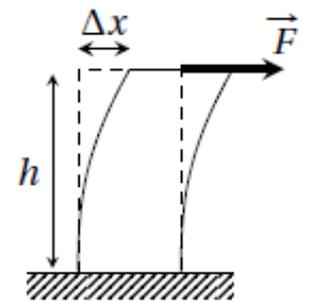
On considère un gratte-ciel de hauteur  $h$  et on souhaite étudier le déplacement horizontal de son sommet, repéré par son abscisse  $x(t)$ .

La mécanique des milieux continus nous aide à modéliser simplement le comportement d'une poutre verticale de section  $S$  et de hauteur  $h$ , soumise à une force tangentielle horizontale  $F$ .

D'après cette théorie, le déplacement  $\Delta x$  du sommet de la poutre par rapport à sa position d'équilibre est relié à la force tangentielle appliquée par la relation  $F = \frac{GS}{h} \Delta x$ , où  $G$  est le module de cisaillement qui vaut  $G_{\text{acier}} = 1.10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ .

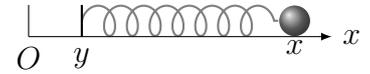
Q1. En considérant que l'intégralité de la masse d'acier qui constitue la tour est utilisée pour réaliser une unique poutre parallélépipédique de hauteur  $h$ , donner l'expression puis calculer la valeur numérique de la section  $S$  en fonction de la masse  $m$  d'acier, de la masse volumique  $\rho = 8000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  de l'acier et de la hauteur  $h$ .

Q2. En déduire la valeur numérique de la constante de raideur équivalente de la poutre  $k = \frac{GS}{h}$ .



On modélise le sommet du gratte-ciel par un point matériel de masse  $m \approx 4000$  tonnes, repéré par son abscisse  $x$  sur un axe horizontal, et la force de cisaillement par une force de rappel élastique  $\vec{F}_{\text{el}}$  associée à un ressort de raideur  $k \approx 8.10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et de longueur à vide nulle.

Pour modéliser le tremblement de terre, on considère que le point d'attache du ressort n'est pas fixe et se déplace sinusoidalement sur l'axe horizontal. Sa position est repérée par l'abscisse  $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$ .



On prendra typiquement  $y_0 = 1 \text{ cm}$ .

Le poids, bien que non négligeable, est compensé par la réaction du sol et les deux forces n'interviennent pas dans la direction horizontale.

Q3. Donner l'expression de la longueur  $\ell(t)$  du ressort en fonction de  $x(t)$  et  $y(t)$ . En déduire l'expression de la force de rappel élastique  $\vec{F}_{\text{el}}$ .

## Partie 2 Prise en compte de la dissipation d'énergie par les poutres

Une quantité énorme d'énergie est dissipée par les interactions métalliques lors de la flexion d'une poutre. Pour modéliser cette dissipation d'énergie, on ajoute une force de frottement qui s'oppose à la vitesse  $\vec{F} = -\lambda \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$ , avec  $\lambda = 10^6 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Q4. Établir l'équation du mouvement vérifiée par  $x(t)$  et la mettre sous forme canonique

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 y(t)$$

On identifiera les expressions de  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction de  $\lambda$ ,  $m$  et  $k$ .

Q5. Que peut-on dire de la solution de l'équation homogène de l'équation différentielle précédente?

Une fois le régime transitoire terminé, de quelle forme est la solution  $x(t)$ ? Quelle est sa pulsation?

Q6. Donner la représentation complexe de  $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$  et de  $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .

Introduire l'amplitude complexe  $\underline{x}_0$  de  $\underline{x}$ .

Q7. Montrer que l'amplitude complexe des oscillations s'exprime selon

$$\underline{x}_0(\omega) = \frac{y_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

On pourra introduire pour la suite la pulsation réduite  $r = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

Q8. Déterminer les équivalents de  $\underline{x}_0(\omega)$  à basses et hautes fréquences. Que signifie « basse fréquence » et « haute fréquence »?

En déduire les valeurs de l'amplitude réelle  $x_0$  à basse et haute fréquences.

Q9. Montrer que l'amplitude admet un maximum lorsque  $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Établir l'expression de la pulsation  $\omega_r$  à laquelle cette résonance intervient.

Q10. Tracer l'allure de  $x_0(\omega)$  lorsque  $Q = 2$  et  $Q = 0,5$ .

Q11. Établir l'expression de l'amplitude  $x_0(\omega_0)$  en fonction de  $y_0$  et  $Q$ .

Q12. Calculer le facteur de qualité de l'oscillateur modélisant la tour. Que peut-on dire de  $\omega_r$  par rapport à  $\omega_0$ ? En déduire, immédiatement, l'expression de l'amplitude maximale d'oscillation de tour.

Q13. Quelle valeur minimale du coefficient de frottement  $\lambda$  permet de s'assurer que l'amplitude des vibrations du sommet ne dépasse pas 10 cm (pour une amplitude du tremblement de terre de 1 cm)? Quelle valeur permet d'annuler la résonance?