Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

TD n°13 Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétique, uniformes et stationnaires — *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5
Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.					✎
Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.		✎	✎		✎
Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant.				✎	
Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.			✎		✎
Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.		✎			✎

Parcours possibles

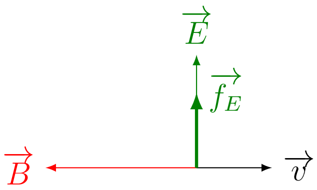
- Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2, n°3, n°5 (Q1, Q3, Q4, Q5, Q8).
- Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°2 et n°5.
- Si vous êtes à l'aise : exercices n°4 et 5.

I Exercices d'application directe du cours

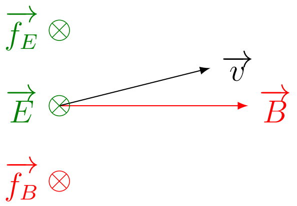
Exercice n°1 Force de Lorentz

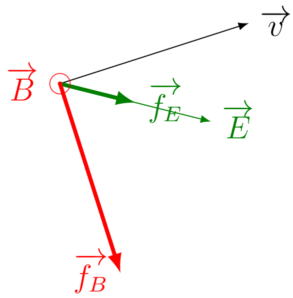
Tracer sur les schémas ci-dessous les vecteurs forces $\overrightarrow{f_E}$ et $\overrightarrow{f_B}$. On suppose que les particules ont toutes une charge positive.

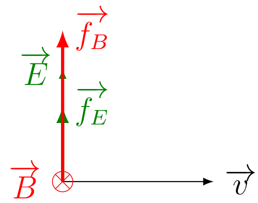
Solution: Dans tous les cas $\overrightarrow{f_E}$ est colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{E}$, car $q > 0$ et $\overrightarrow{f_B}$ est colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$, car $q > 0$.



$\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{B}$ colinéaires, donc $\overrightarrow{f_B} = \overrightarrow{0}$.

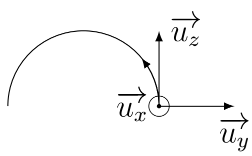






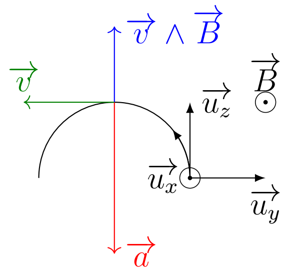
Exercice n°2 Sens du mouvement

R1. Le schéma ci-contre montre la trajectoire d'un électron dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. Déterminer l'orientation du champ magnétique $\overrightarrow{B}$.

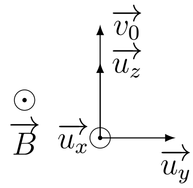


Solution:

Le PFD donne $\overrightarrow{a} = \dfrac{q}{m}\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$
Or le mouvement est circulaire et uniforme, donc $\overrightarrow{a}$ est centripète.
Comme $q < 0$, alors $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ est centrifuge.
La règle de la main droite permet de déterminer le sens de $\overrightarrow{B}$:
pouce : $\overrightarrow{v}$ et majeur : $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \Rightarrow$ index pointe vers nous et indique $\overrightarrow{B}$.

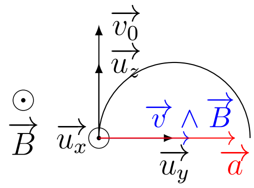


R2. Un proton entre dans une zone où règne un champ magnétique uniforme et stationnaire dans la configuration représentée ci-contre.
Déterminer le sens de la trajectoire.



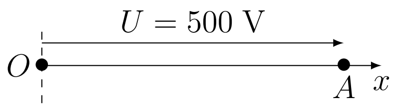
Solution:

Ici la charge est positive, donc $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ sont colinéaires et de même sens, la particule chargée partira donc sur la droite et décrira le cercle dans le sens horaire.



Exercice n°3 Microscope électronique

Dans le canon d'un microscope électronique, un faisceau d'électrons est extrait de la cathode et accéléré par une anode avec une différence de potentiel U.



La charge de l'électron est $-e = -1,602.10^{-19}$ C, sa masse $m = 9,1.10^{-31}$ kg. On donne également la constante de Planck $h = 6,6.10^{-34}$ J $\cdot$ s et la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,0.10^{8}$ m $\cdot$ s^{-1}.
Un électron est extrait de la cathode en O sans vitesse initiale. Par une méthode énergétique, déterminer sa vitesse en A.

Solution: Il faut appliquer la LEC entre O et A : $\Delta O \rightarrow A \mathscr{E}_c = W(\overrightarrow{f_E}) = -\Delta_{O\rightarrow A}\mathscr{E}_p$, avec $\mathscr{E}_p = qV$.

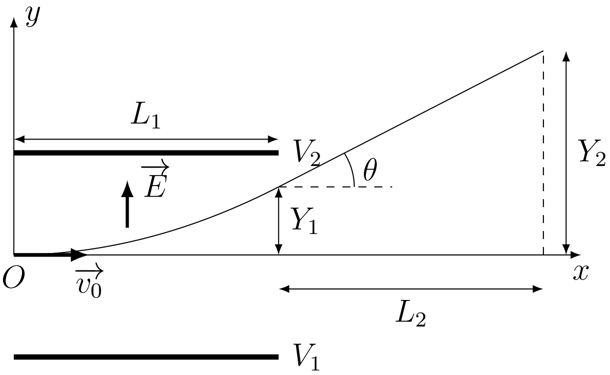
Ainsi $\dfrac{1}{2}mv_A^2 = -q(V_A - V_O) = -qU$, avec $U = V_A - V_O > 0$, or $q < 0$, donc $-qU > 0$, il s'agit bien d'une accélération !

Soit $\boxed{v_A = \sqrt{\dfrac{-2qU}{m}} = 1,3.10^{7}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Extraction de protons

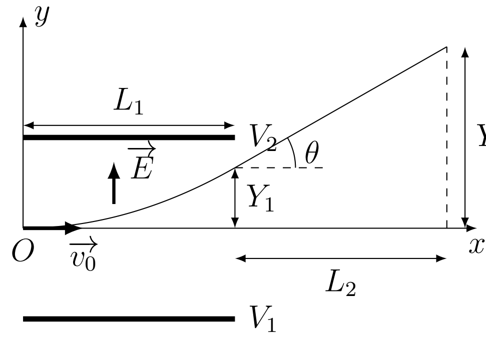
Une méthode d'extraction du faisceau de protons accélérés par un cyclotron consiste à faire passer le dernier tour dans un déflecteur électrostatique provoquant une légère déviation vers l'extérieur. Le schéma de principe est proposé ci-dessous.



Un proton de masse $m = 1,67.10^{-27}$ kg, de charge $e = 1,60.10^{-19}$ C et d'énergie cinétique $\mathscr{E}_c = 5,0$ MeV entre en O dans le déflecteur constitué de deux électrodes planes portées aux potentiels électriques V_1 et V_2 générant un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_y}$ avec $E = 6,0$ MV $\cdot$ m^{-1}.
La longueur du déflecteur est notée L_1.

R1. Quel est le signe de $V_1 - V_2$ pour que le proton soit effectivement dévié dans le sens des y croissants ?

Solution: Au sein du déflecteur, la particule chargée, dont on étudie le mouvement dans le référentiel du labo considérée galiléen, est soumise uniquement à $\overrightarrow{f_E} = q\overrightarrow{E}$.
La particule chargée est de charge positive, donc $\overrightarrow{f_E} = q\overrightarrow{E}$ est dans le même sens que $\overrightarrow{E}$. Au sein du déflecteur, le PFD donne $m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{E}$, pour que le mouvement soit celui indiqué sur le schéma, il faut que $\overrightarrow{E}$ soit dans le sens de $+\overrightarrow{u_y}$. Ainsi la plaque 1 est chargée positivement et la plaque 2 est chargée négativement. Donc $V_1 > V_2$, ainsi $\boxed{V_1 - V_2 > 0}$.
On peut aussi utiliser le fait que les particules tendent à diminuer leurs énergies potentielles, comme $q > 0$, $\mathscr{E}_p = qV$ est d'autant plus faible que V l'est aussi. Il faut donc que $V_2 < V_1$.



R2. La vitesse du proton en O est $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. Calculer v_0 en considérant le proton comme non relativiste.

Solution: Le proton comme non relativiste, donc son énergie cinétique est donnée par $\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}mv_0^2$, soit
$\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{2\mathscr{E}_c}{m}} = 3,1.10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \lesssim 0,1c$ (hypothèse vérifiée).

R3. Déterminer l'équation de sa trajectoire. En déduire le déplacement Y_1 en sortie du déflecteur. Quelle valeur doit-on donner à L_1 pour obtenir un déplacement $Y_1 = 1,0$ mm ?

Solution: On applique le PFD, on intègre par rapport au temps deux fois : $\begin{cases} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= \dfrac{qE}{2m}t^2 \end{cases}$

On en déduit l'équation de sa trajectoire : $\boxed{y(x) = \dfrac{qE}{2m} \times \dfrac{x^2}{v_0^2}}$, qui est l'équation d'une trajectoire parabolique.

En sortie du déflecteur : $\boxed{Y_1 = y(L_1) = \dfrac{qE}{2mv_0^2}L_1^2}$, il faut $L_1 = 5,8$ cm pour obtenir un déplacement $Y_1 = 1,0$ mm, avec $\boxed{L_1 = v_0\sqrt{\dfrac{2mY_1}{qE}}}$

R4. Caractériser la trajectoire du proton après être sorti du déflecteur.

Solution: Après être sorti du déflecteur, les protons ne sont soumis à aucune force, donc ils poursuivent un mouvement rectiligne uniforme.

R5. Exprimer puis calculer la déflexion angulaire θ. En déduire le déplacement Y_2 pour $L_2 = 2,0$ m.

Solution: La trigo nous donne $\tan(\theta) = \dfrac{Y_2 - Y_1}{L_2}$

De plus, $\tan(\theta) = \dfrac{v_y(L_1)}{v_x(L_1)} = \dfrac{\frac{qE}{m}t_1}{v_0}$, avec $t_1 = \dfrac{L_1}{v_0}$

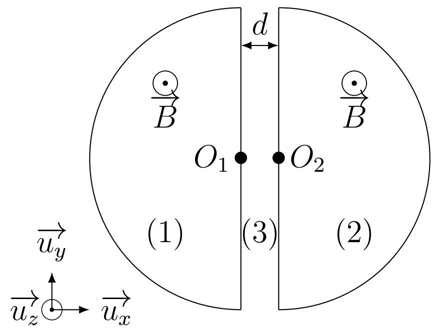
Soit $\tan(\theta) = \dfrac{qEL_1}{mv_0^2} = \dfrac{qE}{mv_0^2} \times v_0\sqrt{\dfrac{2mY_1}{qE}}$, soit $\boxed{\tan(\theta) = \dfrac{1}{v_0}\sqrt{\dfrac{2qEY_1}{m}}}$,

soit $\boxed{Y_2 = Y_1 + L_2 \times \dfrac{1}{v_0}\sqrt{\dfrac{2qEY_1}{m}} = 7,0 \text{ cm}}$

Exercice n°5 Cyclotron

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Charges/cyclotron.php

Un cyclotron est formé de deux enceintes demi-cylindriques D_1 (région (1)) et D_2 (région (2)), appelées dees en anglais, dans lesquelles règnent un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{u_z}$ ($B = 1,0$ T).
Les protons entrent dans les dés avec un vecteur vitesse porté par $\vec{u_x}$: selon $+\vec{u_x}$ quand ils entrent dans le dé (2), selon $-\vec{u_x}$ quand ils entrent dans le dé (1).



Entre ces deux dees, une bande étroite de largeur d (région (3)) est plongée dans un champ électrique uniforme alternatif.
L'amplitude de la tension sinusoïdale générant le champ électrostatique entre les dés est $U_m = 2,5.10^3$ V.
On s'intéresse à l'accélération d'un proton dans le cyclotron.
Données : masse du proton $m = 1,67.10^{-27}$ kg ; charge du proton $q = 1,602.10^{-19}$ C ; 1 eV $= 1,602.10^{-19}$ J

Solution:

- Système : proton de masse m
- Référentiel d'étude : référentiel du laboratoire supposé galiléen à l'échelle de l'expérience.
- Bilan des forces :
  - le poids du proton est négligeable par rapport aux forces électrique et magnétique
  - frottements fluides négligeables car l'expérience est réalisée dans un vide poussée
  - dans les dés (zones (1) et (2)) : force magnétique $\vec{f_B} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
  - dans la zone entre les dés (zone (3)) : force électrique $\vec{f_E} = q\vec{E}$

Partie A Étude qualitative

Un proton est injecté en O_2 avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{u_x}$ (où $v_0 > 0$).

R1. Justifier que le poids du proton peut être négligé dans ce exercice. Devant quelles forces est-il négligé ?

R2. On répondra aux questions suivantes à l'aide des connaissances du cours.

(a) Sans calcul, quel est le mouvement dans le dé (2) ? Dans quel sens a-t-il lieu ?

(b) Que se passe-t-il quand le proton traverse la zone (3) ? Comment est sa vitesse quand il entre dans le dé (1) ?

(c) Que peut-on dire du rayon de la trajectoire dans le dé (1) par rapport à celle qu'avait le proton dans le dé (2) précédemment ?

(d) Tracer qualitativement l'allure de la trajectoire complète dans le cyclotron.

Partie B Mouvement dans un dé

R3. Justifier que le mouvement dans les dés est uniforme.

> **Solution:** Dans les dés le proton est uniquement soumis à la force magnétique $\overrightarrow{f_B} = q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}$.
> Cette force est perpendiculaire à chaque instant au vecteur vitesse, elle ne travaille donc pas.
> Ainsi d'après la loi de la puissance cinétique $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\overrightarrow{f_B}) = 0$, l'énergie cinétique reste constante, donc la norme de la vitesse est constante. $\boxed{\text{Le mouvement est uniforme.}}$

R4. Justifier que le mouvement dans les dés est plan, dans le plan $(O; \overrightarrow{u_x}; \overrightarrow{u_y})$.

R5. En utilisant le principe fondamental de la dynamique et la base de Frenet, établir l'expression du rayon de courbure de la trajectoire du proton dans les dés. Quelle est la nature de la trajectoire ?

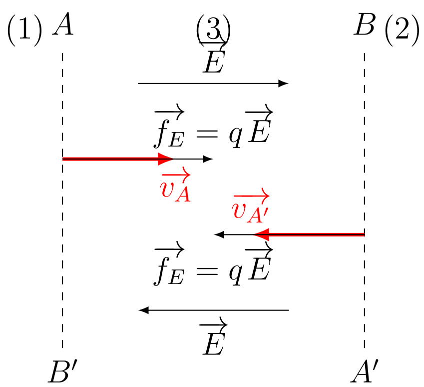
> **Solution:**

R6. Exprimer le temps mis pour parcourir un demi-tour dans un dé. Ce temps dépend-il de la vitesse du proton ? Calculer la valeur numérique.

> **Solution:** Dans les dés, le mouvement étant uniforme on peut écrire que $\tau = \dfrac{\pi R}{v}$, avec πR la distance parcourue dans le dé, soit la moitié du périmètre d'un cercle.
> Ainsi le temps mis pour parcourir un demi-tour dans un dé vaut $\boxed{\tau = \dfrac{\pi m}{qB} = 3,27.10^{-8}\ \mathrm{s}}$ qui est indépendant de la vitesse du proton dans le dé.

Partie C Mouvement dans la zone (3)

R7. En déduire la fréquence f de la tension à appliquer entre les dés pour que le champ $\overrightarrow{E}$ accélère au mieux les protons (on considère que le temps de passage entre les deux dés est négligeable devant les autres temps). Cette fréquence est appelée fréquence cyclotron.

> **Solution:**
> Dans la zone (3), le proton est soumis à la force $\vec{f} = q\overrightarrow{E}$.
> Quand le proton vient du dé (1) sa vitesse est selon $+\overrightarrow{e_x}$. Pour que la force $\vec{f} = q\overrightarrow{E}$ accélère le proton, il est nécessaire qu'elle soit dirigée selon $+\overrightarrow{e_x}$, comme $q > 0$, alors $\overrightarrow{E}$ doit être selon $+\overrightarrow{e_x}$.
> Quand le proton vient du dé (2) sa vitesse est selon $-\overrightarrow{e_x}$. Pour que la force $\vec{f} = q\overrightarrow{E}$ accélère le proton, il est nécessaire qu'elle soit dirigée selon $-\overrightarrow{e_x}$, comme $q > 0$, alors $\overrightarrow{E}$ doit être selon $-\overrightarrow{e_x}$.
> Pour que le champ $\overrightarrow{E}$ accélère au mieux les protons il doit donc changer de sens après le passage dans un dé.
>
> 
>
>
> La demi-période du champ électrique doit être égale à la durée de passage dans un dé (demi-tour).
> Ainsi $\tau = \dfrac{T}{2} = \dfrac{1}{2f} \Rightarrow \boxed{f = \dfrac{qB}{2\pi m} = 15,2\ \mathrm{MHz}}$

R8. Exprimer, puis calculer numériquement (en joules, puis en électron-volts) l'augmentation d'énergie cinétique d'un proton à chaque accélération.

Solution:

— LEC de A vers B (passage de (1) vers (2)) : $\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c = W_{AB}(\overrightarrow{f_E}) = -\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_p = qU_{AB}$
Pour accélérer le proton de charge $q > 0$, il faut $U_{AB} > 0$, donc $U_{AB} = +U_m$ (maximum de la tension sinusoïdale dont il est question dans l'énoncé).

— LEC de A' vers B' (passage de (2) vers (1)) : $\Delta_{A'\to B'}\mathscr{E}_c = W_{A'B'}(\overrightarrow{f_E}) = -\Delta_{A'\to B'}\mathscr{E}_p = qU_{A'B'}$
Pour accélérer le proton de charge $q > 0$, il faut $U_{A'B'} > 0$, donc $U_{A'B'} = +U_m$, avec $U_{A'B'} = -U_{AB}$, il faut donc $U_{AB} < 0$, donc $U_{AB} = -U_m$ (minimum de la tension sinusoïdale dont il est question dans l'énoncé).

La LEC donne dans tous les cas : $\boxed{\Delta\mathscr{E}_c = qU_m = 4.10^{-16}\ \text{J} = 2,5\ \text{keV}}$

Partie D Accélération par le cyclotron

La vitesse d'injection du proton en O est quasi nulle, on désire que sa vitesse atteigne 25.10^3 km · s^{-1}.

R9. Calculer le nombre de tours que doit faire le proton dans le cyclotron ainsi que le temps nécessaire à cette opération.

Solution: On souhaite obtenir une augmentation totale de l'énergie cinétique entre l'injection du proton sans vitesse initiale et la vitesse finale $v_f = 25.10^3$ km · s^{-1} de $\Delta\mathscr{E}_{c,\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = 5.10^{-13}$ J

À chaque passage entre deux dés, l'énergie cinétique augmente de $\Delta\mathscr{E}_c = qU_m$ et on souhaite une augmentation de $\Delta\mathscr{E}_{c,\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_f^2$. Le proton doit donc passer $n = \dfrac{\Delta\mathscr{E}_{c,\text{tot}}}{qU_m} = 1305$ entre les deux dés. Le proton réalisera donc $\boxed{\text{652,5 tours}}$.

R10. Quel est le rayon du dernier arc de cercle parcouru par les protons lorsqu'ils ont atteint cette vitesse ? Commenter la valeur obtenue.

Solution: Le proton a une vitesse v_f en sortant du cyclotron, c'est la vitesse (constante) qu'il possède dans le dernier passage dans un dé. Cela nous permet de déterminer le rayon final $\boxed{R_f = \dfrac{mv_f}{qB} = 26\ \text{cm}}$