Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)
TD n°16 Mouvement d'un solide— *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7	8
Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.				✎				
Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎
Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.							✎	
Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.		✎						
Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎
Pendule pesant : Établir l'équation du mouvement. Établir l'intégrale première du mouvement.	✎	✎				✎		✎
Pendule de torsion : Établir l'équation du mouvement. Établir l'intégrale première du mouvement.					✎			
Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.							✎	
Prendre en compte le travail des forces intérieures pour un système déformable.							✎	

Parcours possibles

— Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, 2 et 3.

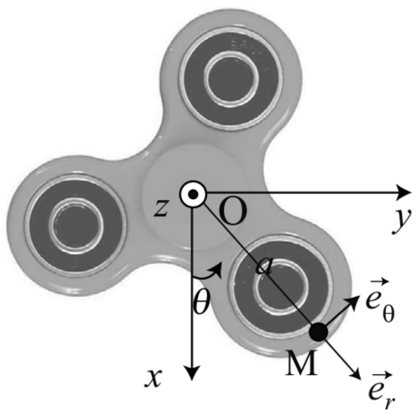
— Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°3, 4, 5 (sauf Q4).

— Si vous êtes à l'aise : exercices n°5, 6, 7.

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Hand-spinner

La mesure du moment d'inertie J_{Oz} d'une pièce complexe équilibrée peut s'effectuer en rajoutant une masselotte m à une distance a de l'axe.
Le moment d'inertie est alors : $J'_{Oz} = J_{Oz} + ma^2$.
On considère le jeu pour enfant ci-contre auquel une masse m est ajoutée à une extrémité M.



R1. Écrire le moment cinétique de l'ensemble selon l'axe Oz.

Solution: Le moment cinétique de l'ensemble est $L_{Oz} = J'_{Oz}\omega = (J_{Oz} + ma^2)\omega$

R2. Effectuer un bilan des actions mécaniques agissant sur l'ensemble.

Solution: Système : {handspinner+masselotte}
Référentiel : terrestre galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

- poids du handspinner, s'exerce au centre d'inertie, situé sur l'axe de rotation, de moment nul par rapport à l'axe de rotation,
- poids de la masselotte $m\overrightarrow{g}$, de moment $\mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) = -mga\sin(\theta)$
- action de la liaison pivot parfaite,
- on néglige tous les frottements

R3. En appliquant le théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle du mouvement.

Solution: D'après le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) : $\dfrac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{Oz}(M\overrightarrow{g}) + \mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) + \mathscr{M}_{Oz}(\text{liaison pivot})$
soit $J'_{Oz}\ddot{\theta} = -mga\sin(\theta)$

R4. Exprimer la période propre T_0 des petites oscillations.
En déduire l'expression du moment d'inertie J_{Oz} en fonction de T_0, m, g et a.

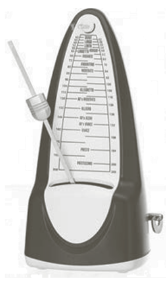
Solution: Dans le cas des petites oscillations, $\sin(\theta) \approx \theta$, donc $J'_{Oz}\ddot{\theta} = -mga\theta$
Soit $\ddot{\theta} + \dfrac{mga}{J'_{Oz}}\theta = 0$ où on reconnaît l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mga}{J'_{Oz}}}$, soit une période propre $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J'_{Oz}}{mga}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_{Oz} + ma^2}{mga}}}$

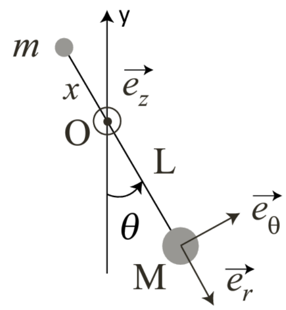
R5. On mesure une période $T_0 = 0,82$ s pour une masse $m = 3,0$ g accrochée à une distance $a = 3,5$ cm, déterminer J_{Oz}.

Solution: D'après la question précédente : $J_{Oz} = \dfrac{T_0^2 mga}{4\pi^2} - ma^2 = 1,4.10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

Exercice n°2 Métronome

Un métronome est constitué de deux masses accrochées à une tige de masse négligeable pouvant tourner autour d'une liaison parfaite d'axe Oz. La masse inférieure de masse M et de rayon R est fixe et située à une distance L de l'axe Oz. La masse supérieure, notée m, est mobile et peut être accrochée à différents points d'abscisse x. Elle est considérée comme ponctuelle.





On note $J = \dfrac{MR^2}{4} + ML^2$ le moment d'inertie du disque par rapport à Oz.
Le but est de comprendre l'origine de la graduation non linéaire présente sur les métronomes.

R1. Déterminer le moment cinétique de l'ensemble[1] selon l'axe Oz.

1. Indice : c'est la somme du moment cinétique de la masse m, ponctuelle (=point matériel), et du disque dont on donne le moment d'inertie dans l'énoncé.

Solution: Système : l'ensemble {tige+masse M+masselotte m}
Référentiel : terrestre considéré galiléen

$$\begin{aligned} L_{Oz}(\text{ensemble}) &= (\overrightarrow{OA} \wedge m\,\overrightarrow{v}(A)) \cdot \overrightarrow{u_z} + J\dot\theta \\ &= \left(-x\overrightarrow{e_r} \wedge m(-x\dot\theta)\overrightarrow{e_\theta}\right) \cdot \overrightarrow{e_z} + J\dot\theta \\ &= mx^2\dot\theta + J\dot\theta \\ &= (mx^2+J)\dot\theta \end{aligned}$$

R2. Effectuer un bilan des actions mécaniques agissant sur l'ensemble des deux masses et de la tige.

Solution: Bilan des actions mécaniques :
- action de la liaison pivot, de moment nul par rapport à (Oz), car parfaite
- poids de M, de moment $\mathscr{M}_{Oz}(M\overrightarrow{g}) = -MgL\sin(\theta)$
- poids de m, de moment $\mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) = mgx\sin(\theta)$

R3. En appliquant le théorème du moment cinétique, exprimer la période T_0 des petites oscillations en fonction de la position x de la masse supérieure.

Solution: Théorème du moment cinétique par rapport à (Oz) :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} &= \mathscr{M}_{Oz}(lpp) + \mathscr{M}_{Oz}(M\overrightarrow{g}) + \mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) \\ (mx^2+J)\ddot\theta &= -MgL\sin(\theta) + mgx\sin(\theta) \\ \ddot\theta + \frac{(ML-mx)g}{mx^2+J}\sin(\theta) &= 0 \\ \text{Petites oscillations } \ddot\theta + \frac{(ML-mx)g}{mx^2+J}\theta &= 0 \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{(ML-mx)g}{mx^2+J}}$

donc de période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mx^2+J}{(ML-mx)g}}$

R4. Pourquoi pour augmenter la fréquence d'oscillation d'une même quantité, le déplacement de la masselotte n'est pas toujours le même ?

Solution: La dépendance de T_0 avec x n'est pas affine, donc l'augmentation de x n'est pas constante pour une augmentation de T_0 donnée.

Exercice n°3 Démarrage d'un moteur

On étudie la phase de mise en rotation du rotor S (partie tournante) d'un moteur de robotique dans le référentiel terrestre. Le rotor S, de moment d'inertie $J = 10,7 \times 10^{-7}$ kg · m^2 est soumis à un couple moteur C_m dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant i traversant le stator (partie fixe) du moteur : $C_m = ki$, avec $k = 22 \times 10^{-3}$ N · m/A. Le courant i est constant : $i = I_0 = 0,10$ A. On suppose que le centre de masse G du rotor est sur l'axe de rotation Δ. Dans un premier temps, on néglige tous les frottements.

R1. En utilisant le théorème du moment cinétique, écrire l'équation donnant la vitesse angulaire $\omega(t)$ de S.

Solution: Système : rotor (S)
Référentiel : terrestre, galiléen
Bilan des actions mécaniques :

- poids s'exerçant au centre d'inertie G, situé sur l'axe de rotation
- couple moteur de moment par rapport à l'axe de rotation $C_m = ki$
- frottements négligés

TMC par rapport à l'axe Δ : $\dfrac{\mathrm{d}L_\Delta(S)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_\Delta(m\overrightarrow{g}) + C_m$
Or $\mathscr{M}_\Delta(m\overrightarrow{g}) = 0$, car G est sur l'axe Δ, donc la droite d'action du poids coupe l'axe de rotation
Ainsi $\boxed{J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = ki}$

R2. La résoudre en supposant qu'au départ S est au repos.

Solution: Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{kI_0}{J}$ est une constante
Ainsi $\omega(t) = \dfrac{kI_0}{J}t + A$, avec $\omega(t=0) = 0 = A$
On en déduit $\boxed{\omega(t) = \dfrac{kI_0}{J}t}$

R3. Déterminer et calculer le temps T_0 mis pour atteindre la vitesse $\omega_0 = 1800\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

Solution: L'instant T_0 est tel que $\dfrac{kI_0}{J}T_0 = \omega_0$, soit $\boxed{T_0 = \dfrac{J\omega_0}{kI_0} = 0,88\ \mathrm{s}}$

En réalité, le rotor S est soumis à un couple de frottement sec $C_s = -400\ \mathrm{\mu N \cdot m}$ et à un couple de frottement fluide $C_f = -\lambda\omega$, avec $\lambda = 1,0 \times 10^{-6}\ \mathrm{N \cdot m \cdot s}$, tous deux s'opposant au mouvement.

R4. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$.

Solution: Dans le TMC précédent, il faut ajouter le couple de frottement fluide $C_f = -\lambda\omega$ et le couple de frottement sec.
On obtient l'équation différentielle : $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = C_s + kI_0 - \lambda\omega$
Soit, sous forme canonique : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\lambda}{J}\omega = \dfrac{C_s + kI_0}{J}}$
Dans laquelle on peut identifier la constante de temps $\boxed{\tau = \dfrac{J}{\lambda}}$
La solution générale s'écrit : $\omega(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{C_s + kI_0}{\lambda}$
Or à $t = 0$, $\omega(0) = 0$, donc $A = -\dfrac{C_s + kI_0}{\lambda}$
On en déduit $\boxed{\omega(t) = \dfrac{C_s + kI_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

R5. Quelle est la vitesse angulaire maximale que pourra atteindre le moteur ?

Solution: La vitesse maximale est $\boxed{\omega_f = \omega(\infty) = \dfrac{C_s + kI_0}{\lambda}}$

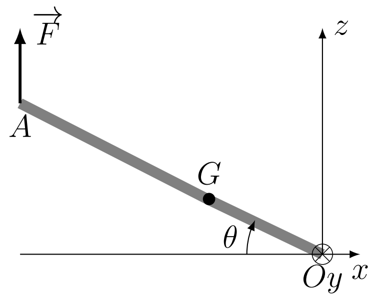
R6. Déterminer le temps T mis pour atteindre le régime permanent (à 5%). Conclure.

Solution: T est l'instant tel que

$$\begin{aligned}
\omega(t=T) &= 0,95\omega_f \\
\omega_f\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) &= 0,95\omega_f \\
1 - e^{-\frac{T}{\tau}} &= 0,95 \\
e^{-\frac{T}{\tau}} &= 0,05 \\
T &= -\tau \ln(0,05)
\end{aligned}$$

Le régime permanent est atteint à 95%, au bout de $T \approx 3\tau$.

Exercice n°4 Monter un mur

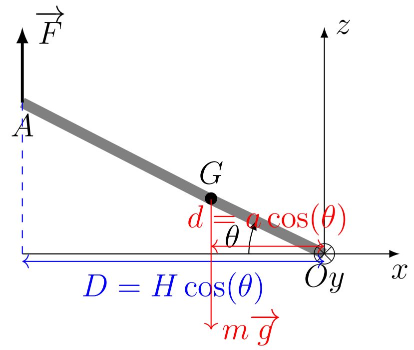


On utilise une grue pour dresser un mur en béton préfabriqué à la verticale.
Le mur est initialement posé sur le sol ($\theta = 0$). La grue le soulève en exerçant une force $\overrightarrow{F}$ toujours verticale appliquée en A. Le mur pivote alors autour de l'axe (Oy) fixe.
Le mur est de hauteur $H = OA = 3,0$ m, de masse $m = 5,0.10^3$ kg et son centre de masse G se situe à $OG = a = 1,2$ m de la base. Le moment d'inertie du mur par rapport à l'axe (Oy) est $J = 2,8.10^3$ kg $\cdot$ m^2.
On néglige tous les frottements.

R1. Faire un bilan des actions mécaniques exercées sur le mur.

Solution:
Système : mur de masse m, de centre d'inertie G, de moment d'inertie J
Référentiel : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

- poids : $m\overrightarrow{g}$, qui s'exerce en G
- action de la grue : $\overrightarrow{F}$, qui s'exerce en A
- réaction du support : $\overrightarrow{R}$, qui s'exerce en O



R2. Appliquer le théorème du moment cinétique au mur par rapport à l'axe Oy.
En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ.

Solution:
Loi du moment cinétique au mur par rapport à Oy dans le référentiel terrestre galiléen :
$\dfrac{\mathrm{d}L_{Oy}(\text{mur})}{\mathrm{dt}} = \mathscr{M}_{Oy}(m\overrightarrow{g}) + \mathscr{M}_{Oy}(\overrightarrow{F}) + \mathscr{M}_{Oy}(\overrightarrow{R})$
Avec $L_{Oy}(\text{mur}) = J\dot{\theta}$
$\mathscr{M}_{Oy}(\overrightarrow{R}) = 0$ car la droite d'action de $\overrightarrow{R}$ coupe l'axe (Oy).
$\mathscr{M}_{Oy}(m\overrightarrow{g}) = -mga\cos(\theta) < 0$: car le poids fait tourner le mur dans le sens indirect par rapport à l'axe (Oy).

$\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}) = FH\cos(\theta) > 0$: car $\vec{F}$ fait tourner dans le sens direct
La LMC donne : $\boxed{J\ddot{\theta} = (FH - mga)\cos(\theta)}$

R3. Le mur pivote autour de sa base (Oy) avec une vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega_0 = 0,20$ rad $\cdot$ s^{-1} constante. Déterminer et calculer la norme de la force $\vec{F}$ exercée par la grue.

Solution: Si la rotation se fait à vitesse angulaire constante, alors $\ddot{\theta}$ est nul pour tout angle θ.
Ainsi $FH = mga$, soit $\boxed{F = mg\dfrac{a}{H} = 2,0.10^4 \text{ N}}$

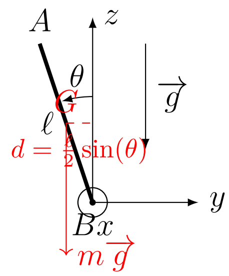
R4. Exprimer la puissance de la force $\vec{F}$ puis le travail W effectué par la grue pour dresser le mur à la verticale. Calculer W.

Solution:
Puissance de la force : $\boxed{\mathscr{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}) \times \dot{\theta} = FH\omega_0\cos(\theta) = mga\omega_0\cos(\theta)}$
Travail de la grue : $W = \displaystyle\int_0^{t_f} \mathscr{P}(\vec{F})\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{M}_{Oy}(\vec{F})\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mga\omega_0\cos(\theta)\mathrm{d}\theta$
Soit $W = mga\omega_0[\sin(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}$, soit $\boxed{W = mga\omega_0 = 1,2.10^4 \text{ J}}$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°5 Pendule de torsion

Un pendule est formé d'une tige AB de longueur ℓ, de masse m et de moment d'inertie $J = \dfrac{1}{3}m\ell^2$ par rapport à l'axe Bx.
La tige est fixée en B par un ressort de torsion de couple de rappel $\mathcal{M}_{Bx} = -k\theta$.
On néglige les frottements.



R1. Déterminer l'unité de la constante k.

Solution: $[k] = \dfrac{[M_{Bx}]}{[\theta]} =$ N $\cdot$ m : k est une énergie.

R2. Établir l'équation du mouvement de la tige grâce au théorème du moment cinétique.

Solution: Système : tige de masse m et de moment d'inertie J
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

— poids $m\vec{g}$, s'exerce en G, au centre de la tige
— action du ressort de torsion de moment $\mathcal{M}_{Bx} = -k\theta$

Loi du moment cinétique à la tige par rapport à l'axe Bx dans le référentiel terrestre galiléen :
$\dfrac{\mathrm{d}L_{Bx}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{Bx}(m\vec{g}) + \mathcal{M}_{Bx}(\text{ressort})$
Avec : $L_{Bx} = J\dot{\theta} = \dfrac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta}$
et $\mathcal{M}_{Bx}(m\vec{g}) = +mg\dfrac{\ell}{2}\sin(\theta) > 0$, car le poids tend à faire tourner la tige dans le sens direct.

La LMC donne : $\boxed{\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = mg\frac{\ell}{2}\sin(\theta) - k\theta}$

R3. En déduire l'équation du mouvement dans le cas des petits angles.
À quelle condition, portant sur m, ℓ, k et g, l'équation différentielle précédente est celle d'un oscillateur harmonique ?

Solution: Petits angles : $\sin(\theta) \approx \theta$

On obtient : $\ddot{\theta} + \frac{k - mg\frac{\ell}{2}}{J}\theta = 0$ qui est l'équation d'un oscillateur harmonique à condition que $\frac{k - mg\frac{\ell}{2}}{J}$ soit positif.

$\boxed{\text{Des oscillations sont observées à condition que } k > mg\frac{\ell}{2}}$

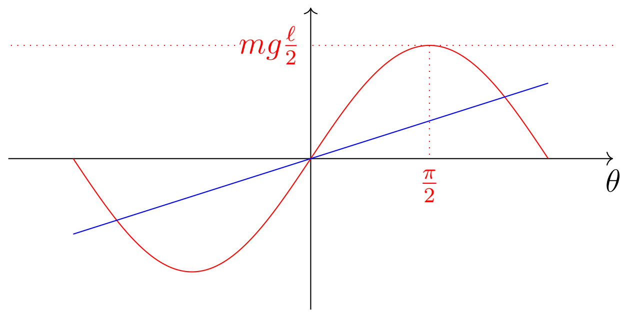
Si $k < mg\frac{\ell}{2}$, alors on peut poser $-\alpha^2 = \frac{k - mg\frac{\ell}{2}}{J}$ et l'équation différentielle s'écrit $\ddot{\theta} - \alpha^2\theta = 0$ dont la solution s'écrit $\theta(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{\alpha t}$ qui ne correspond pas à des oscillations. De plus, θ va augmenter dans le temps, et la condition « petits angles » ne sera plus vérifiée.

R4. Hors du cas particulier des petits angles, déterminer les positions d'équilibre possible pour $\theta \in [-\pi, \pi[$.
Faire une résolution graphique.
À quelle condition existe-t-il trois positions d'équilibre ?

Solution: À l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$, donc $0 = -k\theta_{éq} + mg\frac{\ell}{2}\sin(\theta_{éq})$

Il faut donc résoudre $k\theta_{éq} = mg\frac{\ell}{2}\sin(\theta_{éq})$, ce que l'on peut faire graphiquement en cherchant les intersections entre les deux courbes $k\theta_{éq}$ et $mg\frac{\ell}{2}\sin(\theta_{éq})$.

Pour $\theta \in [\pi, -\pi]$, il y a trois intersections, et donc 3 positions d'équilibre, si $k\frac{\pi}{2} < mg\frac{\ell}{2}\sin(\pi/2)$, soit $k\frac{\pi}{2} < mg\frac{\ell}{2}$



Exercice n°6 Chute d'un téléphone

À l'instant $t = 0$ À l'instant $t > 0$

Un matin, peu réveillé, vous posez votre téléphone en équilibre sur la table de la cuisine. Vous ne pouvez l'empêcher de chuter.

Le fin portable a une longueur $2L = 15$ cm et une masse $m = 170$ g.
Il est posé initialement sur la table comme indiqué sur la figure de gauche et il peut pivoter autour de l'arête Oz avant de tomber par terre. La distance OG est notée a avec $a = 2,0$ cm.
Le moment d'inertie J du portable par rapport à l'axe de rotation Oz vaut $J = 4,0.10^{-4}$ kg · m^2.
Nous noterons la force de contact $\overrightarrow{R} = R_r\overrightarrow{u_r} + R_\theta\overrightarrow{u_\theta}$. Le glissement de frottement du portable sur l'arête de la table obéit aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement $f = 0,20$. Ainsi, le portable ne glisse pas sur l'arête tant que $\left|R_r\right| < f\left|R_\theta\right|$.
Nous négligeons tout frottement fluide.

R1. Expliquer brièvement pourquoi la position initiale du portable n'est pas une position d'équilibre.

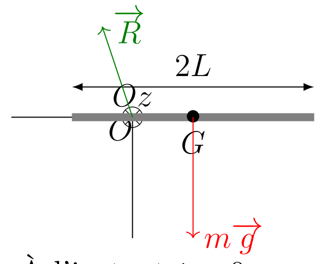
Solution:

R2. Nous nous intéressons à la première phase du mouvement au cours de laquelle le téléphone pivote sans glisser sur l'arête. Faire un bilan des forces exercées sur le téléphone.

Solution:

Système : téléphone
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

- poids en G
- force de contact $\overrightarrow{R}$ en O

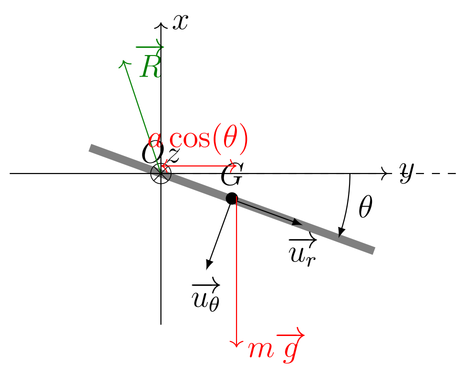


À l'instant $t = 0$

Loi du moment cinétique au téléphone par rapport à l'axe (Oz) :
$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}(\text{téléphone})}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) + \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{R})$$
$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{R}) = 0$ car la droite d'action de $\overrightarrow{R}$ coupe l'axe (Oz).
$\mathcal{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) = mga$
Ainsi $\mathcal{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) + \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{R}) > 0$: le téléphone va donc avoir tendance à tourner dans le sens direct par rapport à l'axe (Oz), il n'est donc pas à l'équilibre.

R3. Appliquer le théorème du moment cinétique au portable par rapport à l'axe Oz. En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ.

Solution:
Loi du moment cinétique au téléphone par rapport à l'axe (Oz) :
$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}(\text{téléphone})}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) + \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{R})$$
Avec : $L_{Oz}(\text{téléphone}) = J\dot{\theta}$
$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{R}) = 0$ car la droite d'action de $\overrightarrow{R}$ coupe l'axe (Oz).
$\mathcal{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g}) = mga\cos(\theta) > 0$: $m\overrightarrow{g}$ fait tourner le téléphone dans le sens direct par rapport à (Oz).



La LMC donne : $\boxed{J\ddot{\theta} = mga\cos(\theta)}$ (1)

R4. Appliquer la loi de l'énergie cinétique au portable. En déduire une intégrale première du mouvement.

Solution:
LEC au portable entre $t = 0$ et t quelconque : $\Delta\mathcal{E}_c = W(m\overrightarrow{g}) + W(\overrightarrow{R})$

Avec $\Delta\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - 0$

$W(m\overrightarrow{g}) = \int_0^t \mathscr{P}(m\overrightarrow{g})\mathrm{d}t = \int_0^\theta \mathscr{M}_{Oz}(m\overrightarrow{g})\mathrm{d}\theta$

Soit $W(m\overrightarrow{g}) = \int_0^\theta mga\cos(\theta)\mathrm{d}\theta = mga[\sin(\theta)]_0^\theta = mga\sin(\theta)$

La LEC donne alors l'intégrale première du mouvement : $\boxed{\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = mga\sin(\theta)}$ (2)

R5. Appliquer la loi de la quantité de mouvement au portable. En déduire des expressions de R_r et R_θ en fonction de θ et des données de l'exercice.

Solution:
PFD au téléphone dans le référentiel terrestre galiléen : $m\overrightarrow{a}(G) = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R}$
Tant que le téléphone ne glisse pas, le centre d'inertie décrit un mouvement circulaire de rayon a, donc $\overrightarrow{a}(G) = a\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - a\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$
PFD en projection :
- selon $\overrightarrow{u_r}$: $-ma\dot{\theta}^2 = R_r + mg\sin(\theta)$ (3)
- selon $\overrightarrow{u_\theta}$: $ma\ddot{\theta} = R_\theta + mg\cos(\theta)$ (4)

(2) dans (3) : $R_r = -ma \times \frac{2mga}{J}\sin(\theta) - mg\sin(\theta)$, soit $\boxed{R_r = -mg\sin(\theta)\left(\frac{2ma^2}{J} + 1\right)}$

(1) dans (4) : $R_\theta = ma \times \frac{mga}{J}\cos(\theta) - mg\cos(\theta)$, soit $\boxed{R_\theta = mg\cos(\theta)\left(\frac{ma^2}{J} - 1\right)}$

R6. Déterminer l'angle θ_0 à partir duquel le téléphone commence à glisser sur l'arête.

Solution:
Le téléphone ne glisse pas tant que la condition de non glissement $\left|R_r\right| < f\left|R_\theta\right|$ est vérifiée, c'est-à-dire tant que $mg\sin(\theta)\left(\frac{2ma^2}{J} + 1\right) < fmg\cos(\theta)\left|\frac{ma^2}{J} - 1\right|$

Le téléphone ne glisse pas tant que $\tan(\theta) < f\frac{\left|\frac{ma^2}{J} - 1\right|}{\frac{2ma^2}{J} + 1}$

Avec $ma^2 = 6,8.10^{-5}$ kg $\cdot$ m$^2 < J$, donc $\frac{ma^2}{J} - 1 < 0$, donc $\left|\frac{ma^2}{J} - 1\right| = 1 - \frac{ma^2}{J}$

Le téléphone commencera à glisser quand θ_0 sera-t-elle que $\boxed{\tan(\theta_0) = f\frac{1 - \frac{ma^2}{J}}{1 + 2\frac{ma^2}{J}}}$.

A.N. $\underline{\theta_0 = 7,1°}$

R7. À partir de cet instant pris comme origine des temps, le téléphone quitte la table en un temps très bref, conservant quasiment la même orientation θ_0 et la même vitesse angulaire ω_0.
Quel est, après avoir quitté la table, la loi d'évolution de la position selon la verticale ($x_G(t)$), où G est le barycentre du téléphone, en supposant que la tartine ne retouche plus la table ?

Solution: Après avoir quitté la table, le téléphone n'est soumis qu'à son poids.
PFD au téléphone dans le référentiel terrestre galiléen (permet d'obtenir le mouvement du centre d'inertie) : $m\overrightarrow{a}(G) = m\overrightarrow{g}$
En projection selon $\overrightarrow{u_x}$: $\ddot{x}_G = -g$
Par intégrations successives $x_G(t) = -\dfrac{g}{2}t^2 + \dot{x}_G(0)t + x_G(0)$
Avec $x_G(0) = -a\sin(\theta_0) < 0$ $(\theta_0 > 0)$
et $\dot{x}_G(0) = \overrightarrow{v_G}(0) \cdot \overrightarrow{u_x} = a\dot{\theta}(0)\overrightarrow{u_\theta} \cdot \overrightarrow{u_x} = a\dot{\theta}(0)\cos(\theta_0 + \pi/2)$, soit $\dot{x}_G(0) = -a\dot{\theta}(0)\sin(\theta_0)$
On néglige la vitesse initiale, quand le téléphone quitte la table, par rapport à celle qu'il va acquérir.
Alors $\boxed{x_G(t) = -\dfrac{g}{2}t^2 - a\sin(\theta_0)}$

R8. Déterminer le temps τ pour lequel le téléphone touche le sol. On considère que la hauteur h de la table est nettement supérieure aux dimensions du téléphone et que la vitesse initiale du téléphone est très faible devant sa vitesse finale.

Solution:
Le téléphone touche le sol à l'instant τ, tel que $x_G(\tau) = -h$
Alors : $\tau = \sqrt{\dfrac{2(h - a\sin(\theta_0))}{g}}$

R9. On admet que pendant le vol, la vitesse angulaire du téléphone reste constante, égale à ω_0.
Quelle est son expression ? En déduire $\theta(\tau)$.
A.N. pour $h = 70$ cm.

Solution: L'intégrale première du mouvement à l'instant où le téléphone commence à glisser donne :
$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2mga\cos(\theta_0}{J}} > 0$, car θ augmente au cours du mouvement.
En la supposant constante, cela permet de déterminer $\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$
Ainsi $\boxed{\theta(\tau) = \theta_0 + \omega_0\tau}$
A.N. : $\underline{\theta(\tau) = 4,6 \text{ rad} \approx \dfrac{3\pi}{2} \text{ rad}}$

R10. De quel côté tombe le téléphone, si on suppose qu'il n'y a pas de rebond ?

Solution: En l'absence de rebond, le téléphone tombera sur la tranche....

Exercice n°7 Mouvement de salsa

Maria est danseuse de salsa. Lors des tours en pivot, elle tourne autour de son axe Gz vertical en donnant une petite impulsion à l'aide de son pied gauche, l'appui se faisant sur son pied droit. La position de ses bras lui permet de modifier sa vitesse de rotation ω. G est le centre de masse de Maria.
L'appui au sol s'accompagne d'un couple de frottement de moment C_f par rapport à l'axe Gz que nous supposerons constant. Nous négligeons tout frottement fluide.
L'impulsion donne à Maria une vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 2\pi$ rad $\cdot$ s^{-1}. Ses bras sont tendus de sorte que son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation Gz est $J_1 = 2,4$ kg $\cdot$ m^2. Elle réalise alors juste un tour avant de s'arrêter.

R1. Déterminer la valeur du couple C_f.

Solution: LEC : $-\dfrac{1}{2}J_1\omega_0^2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} C_f \mathrm{d}\theta$, soit $C_f = -\dfrac{J_1\omega_0^2}{4\pi} = -7,5$ N $\cdot$ m < 0

R2. Quelle énergie a été dissipée dans les frottements au cours de son tour ?

> **Solution:** Énergie dissipée par les frottements : $C_f \times 2\pi = \frac{1}{2}J_1\omega_0^2 = 47$ J

Maria prend maintenant la même impulsion lui conférant la vitesse angulaire ω_0 puis replie presque instantanément ses bras de sorte que son moment d'inertie par rapport à Gz devient $J_2 = 0,80$ kg · m^2.

R3. Quelle vitesse angulaire ω_0' possède Maria après avoir replié ses bras ? Combien de tours réalise-t-elle alors avant de s'arrêter ?

> **Solution:** Maria ayant replié ses bras quasiment instantanément, on peut donc considérer que les frottements ont peu le temps d'agir sur la durée de repliement des bras, donc le moment cinétique se conserve $J_1\omega_0 = J_2\omega_0'$, soit $\omega_0' = 6\pi$ rad · s^{-1}
> LEC : $0 - \frac{1}{2}J_2{\omega_0'}^2 = C_f\theta_f$, donc $\theta_f = -\frac{1}{2}\frac{J_2{\omega_0'}^2}{C_f} = 2\pi\frac{J_2{\omega_0'}^2}{J_1\omega_0^2} = 2\pi\frac{\omega_0'}{\omega_0} = 2\pi\frac{J_1}{J_2} = 2\pi \times 3$: 3 tours seront faits avant de s'arrêter.

III Résolution de problème

Exercice n°8 Vitesse d'un marcheur

Retrouver, en fonction des dimensions de votre corps, l'ordre de grandeur de la vitesse de marche naturelle. Donnée : le moment d'inertie d'une tige rectiligne, homogène, de masse m et longueur ℓ par rapport à une de ses extrémité vaut $J = \frac{1}{3}m\ell^2$.