TD-1 : Méthodes mathématiques, trigonométrie

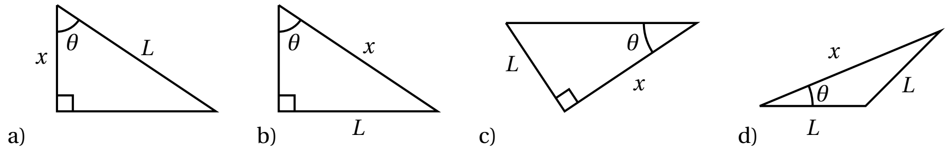
Exercice 1 : Calculs trigonométriques

Dans cet exercice, on demande de représenter les angles ci-dessous sur le cercle trigonométrique puis de calculer (de tête!) leur cosinus et leur sinus :

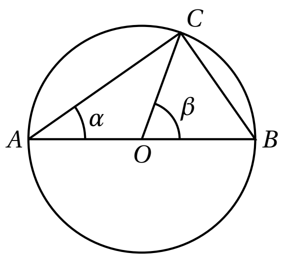
a) $\frac{7\pi}{4}$ b) $\frac{14\pi}{3}$ c) $\frac{19\pi}{6}$ d) $\frac{30\pi}{4}$

Exercice 2 : Fonctions trigonométriques

Dans chacune des figures ci-dessous, déterminer la longueur x en fonction de L et de θ.

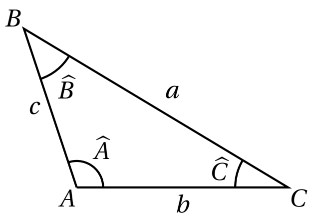


⋆ Exercice 3 : Angle au centre



AB est un diamètre du cercle. On note $\alpha = \widehat{BAC}$. Montrer que $\beta = \widehat{BOC} = 2\alpha$.

⋆ Exercice 4 : Relations dans un triangle



ABC est un triangle quelconque. Montrer que $\dfrac{\sin\hat{A}}{a} = \dfrac{\sin\hat{B}}{b} = \dfrac{\sin\hat{C}}{c}$.

⋆ Exercice 5 : Système d'équations

Résoudre le système d'équations suivantes : $\begin{cases} 2x+3y+z=6 \\ x-y-2z=3 \\ 4x+6y-3z=22 \end{cases}$.

⋆ Exercice 6 : Voyages à la surface de la Terre

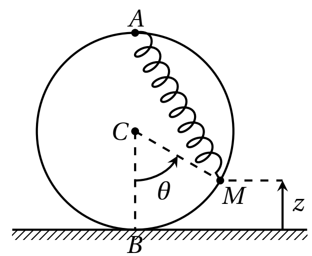
On assimile la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6{,}4\cdot 10^3$ km. La latitude d'un point P de la surface de la Terre désigne la position angulaire de P mesurée par rapport à l'équateur. Par convention la latitude est positive dans l'hémisphère nord et négative dans l'hémisphère sud. La longitude mesure la position angulaire de P mesurée par rapport au méridien de Greenwich. Par convention la longitude est positive à l'est de ce méridien et négative à l'ouest.
Une personne se trouve à Amiens (latitude : $\lambda = 49{,}9°$, longitude : $\varphi = 2{,}3°$). Elle entame un voyage en se déplaçant dans la direction d'un méridien (longitude constante). Quelle distance a-t-elle parcouru quand elle revient à son point de départ ? Même question si elle voyage en suivant un parallèle (latitude constante).

⋆ Exercice 7 : Communication d'un satellite GPS avec la surface terrestre

Lorsqu'un satellite GPS communique avec un émetteur situé en un point P de la surface de la Terre, le temps de propagation des signaux est affecté par l'atmosphère. Il apparaît un délai qui est proportionnel à l'épaisseur de la couche d'atmosphère traversée et dont il faut tenir compte pour évaluer correctement les coordonnées géographiques du point P.
On peut assimiler l'atmosphère à une couche sphérique d'épaisseur $h = 100$ km uniforme au-dessus de la surface terrestre. On imagine que le satellite se situe en dehors de l'atmosphère, dans la direction de l'horizon du point de vue de l'émetteur situé en un point P de la surface terrestre.

1. Faire un schéma de la situation.
2. Montrer, avec une approximation que l'on justifiera, qu'un signal qui se propage entre l'émetteur et le satellite traverse une épaisseur d'atmosphère $e = \sqrt{2hR_T}$, où $R_T = 6{,}4\cdot 10^3$ km est le rayon terrestre.

⋆⋆ Exercice 8 : Anneau sur un cercle

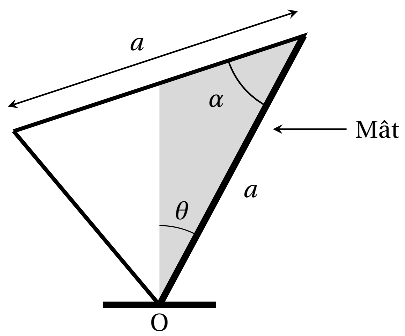


Un anneau, assimilé à un point M, peut se déplacer sur un rail circulaire de rayon R, situé dans un plan vertical. Cet anneau est accroché à un ressort élastique dont l'autre extrémité est fixée au point A. On note z l'altitude de l'anneau, mesurée à partir du point le plus bas du cercle (point B).
La position de l'anneau sur le cercle est repérée par l'angle θ, mesuré par rapport à la verticale descendante.

1. Déterminer l'altitude z de l'anneau en fonction de θ.
2. Montrer que $\ell^2 = 2R^2(1+\cos\theta)$, où $\ell = AM$ est la longueur du ressort (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 3, on rappelle également que $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$).

⋆⋆ Exercice 9 : Planche à voile

On modélise la voile d'une planche à voile par un triangle isocèle plein de surface S, dont l'un des deux côtés de longueur identique a constitue le mât de la voile. L'angle au sommet symétrique du triangle isocèle est appelé α. Le mât de la voile fait un angle θ avec la verticale, que le ou la véliplanchiste peut modifier en faisant pivoter le mât autour du point O.



1. Établir l'expression de S en fonction de α.

2. Établir l'expression de la surface S' de la voile située à droite de la verticale et représentée en grisé sur la figure ci-contre. On exprimera S' en fonction de a, α et θ.

3. Montrer que la verticale sépare la voile en deux parties de surfaces égales à condition que l'angle θ vérifie :

$$\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$$

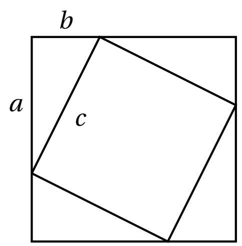
⋆ Exercice 10 : Résolution d'une équation par méthode graphique

Dans cet exercice, on cherche des informations sur les solutions de l'équation $\sin\theta = K\theta$, sur l'intervalle $\theta \in]-\pi,\pi]$ (K est un réel positif quelconque).

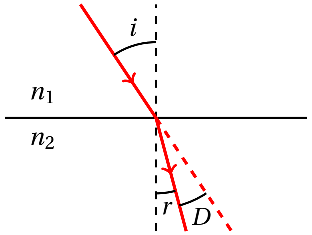
1. On pose $f : \theta \mapsto \sin\theta$. Que valent $f(0)$ et $f'(0)$? En déduire une solution évidente de l'équation $\sin\theta = K\theta$ valable quelque soit K. Rappeler en quoi la valeur de $f'(0)$ nous renseigne sur l'allure du graphe de la fonction sinus au voisinage de 0.
2. Tracer, sur un même graphique, l'allure de la fonction f sur l'intervalle $]-\pi,\pi]$ et, pour différentes valeurs de K, l'allure de la fonction $g_K : \theta \mapsto K\theta$.
3. À l'aide de cette construction graphique, montrer que le nombre de solutions de l'équation $\sin\theta = K\theta$ dépend de la valeur de K. Dans chacun des cas de figure, déterminer le nombre de solutions et les représenter sur le graphique.

⋆ Exercice 11 : Théorème de Pythagore

En vous appuyant sur la figure ci-contre, démontrer le théorème de Pythagore. Pour cela vous pouvez chercher deux manières différentes d'exprimer l'aire du grand carré.



⋆⋆ Exercice 12 : Loi de Descartes



En optique, la loi de Descartes permet de déterminer la déviation d'un rayon lumineux, lorsque celui-ci traverse un dioptre qui sépare deux milieux transparents d'indices de réfraction différents. Dans le cas où un rayon passe d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice $n_2 > n_1$, les directions du rayon incident et du rayon réfracté (mesurées par rapport à la normale au point d'incidence, voir le schéma), vérifient l'équation $n_1 \sin i = n_2 \sin r$.

On veut que le rayon lumineux soit dévié d'un angle D donné à la traversée du dioptre. Calculer la valeur de l'angle i à choisir.

AN : $D = 5°$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}33$.

Solutions

Ex1 : a) $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos\left(\frac{19\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{19\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, d) $\cos\left(\frac{30\pi}{4}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{30\pi}{4}\right) = -1$

Ex2 : a) $x = L\cos\theta$, b) $x = \frac{L}{\sin\theta}$, c) $x = \frac{L}{\tan\theta}$, d) $x = 2L\cos\theta$

Ex3 : $\beta = 2\alpha$

Ex5 : $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$

Ex6 : Longitude constante : $L = 4{,}0 \cdot 10^4$ km.
Latitude constante : $L = 2{,}6 \cdot 10^4$ km.

Ex8 : 1. $z = R(1-\cos\theta)$ 2. $\ell^2 = 2R^2(1+\cos\theta)$

Ex9 : 1. $S = \frac{a^2}{2}\sin\alpha$ 2. $S' = \frac{a^2}{2(\cot\alpha + \cot\theta)}$

Ex10 : 3. $K \geqslant 1$: une seule solution. $K < 1$: 3 solutions.

Ex12 : $i = 19{,}6°$