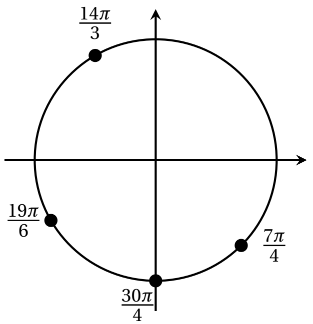
TD-1 : Méthodes mathématiques, trigonométrie - corrigé

Exercice 1 : Calculs trigonométriques

On représente ci-dessous les différentes position angulaires mais d'abord, on simplifie en ramenant l'angle dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par rotation d'une valeur multiple de 2π.

$$\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4} \quad , \quad \frac{14\pi}{3} - 4\pi = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad \frac{19\pi}{6} - 4\pi = -\frac{5\pi}{6} \quad , \quad \frac{30\pi}{4} - 8\pi = -\frac{\pi}{2}$$



Exercice 2 : Fonctions trigonométriques

a) $\cos\theta = \frac{x}{L} \iff \boxed{x = L\cos\theta}$. b) $\sin\theta = \frac{L}{x} \iff \boxed{x = \frac{L}{\sin\theta}}$. c) $\tan\theta = \frac{L}{x} \iff \boxed{x = \frac{L}{\tan\theta}}$.

d) Après avoir tracé la hauteur issue du sommet opposé à x, on voit rapidement que $\boxed{x = 2L\cos\theta}$.

⋆ Exercice 3 : Angle au centre

AOC est isocèle en O donc $\widehat{ACO} = \widehat{CAO} = \alpha$. On voit rapidement que $\widehat{AOC} = \pi - \beta$. En sommant les angles du triangle AOC, on obtient :

$$\alpha + \alpha + \pi - \beta = \pi \iff \boxed{\beta = 2\alpha}$$

⋆ Exercice 4 : Relations dans un triangle

La hauteur issue de A a pour longueur $c\sin\widehat{B}$ mais également $b\sin\widehat{C}$. On en déduit que $\frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$. On obtient la dernière égalité de la même manière, en traçant la hauteur issue de B (ou de C).

⋆ Exercice 5 : Système d'équations

Par souci de clarté, on commence par numéroter les équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 & (1) \\ x - y - 2z = 3 & (2) \\ 4x + 6y - 3z = 22 & (3) \end{cases}$$

On remarque qu'en écrivant $2 \times (1) - (3)$, on élimine d'un seul coup les variables x et y :

$$5z = -10 \iff \boxed{z = -2}$$

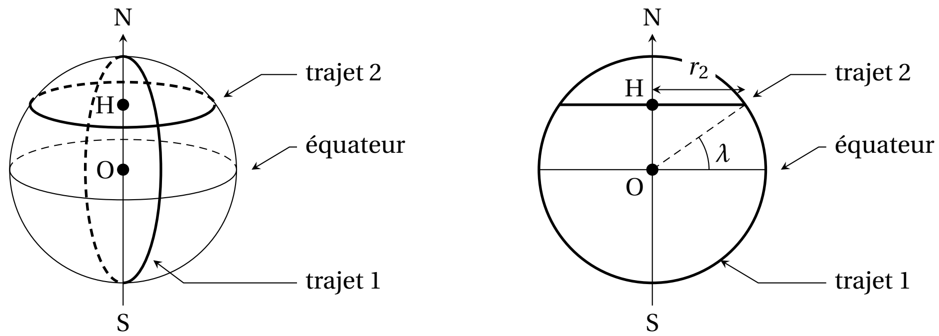
Il reste ensuite un système 2×2 à résoudre :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & (1) \\ x - y = -1 & (2) \end{cases}$$

En écrivant $(1) + 3 \times (2)$, on élimine y : $5x = 5 \iff \boxed{x = 1}$
Finalement, on obtient : $3y = 6 \iff \boxed{y = 2}$

⋆ Exercice 6 : Voyages à la surface de la Terre

On représente sur le schéma ci-dessous les deux trajets suivis (suivant un mérifien et suivant un parallèle) selon une vue en perspective (à gauche) et une vue de profil (à droite).

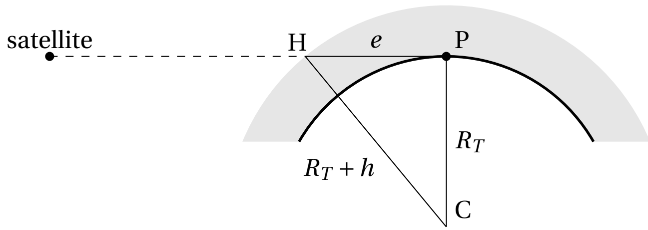


Le trajet 1 (longitude constante) est un cercle centré sur le centre O de la Terre. La distance parcourue est donc $\boxed{L_1 = 2\pi R_T = 4,0 \cdot 10^4\,\text{km}}$.

Le trajet 2 (latitude constante) est un cerle centré sur H, projeté d'un point situé à la latitude d'Amiens sur l'axe des pôles. Le rayon de ce parcours est $r_2 = R_T\cos\lambda$. On en déduit que la distance parcourue vaut $\boxed{L_2 = 2\pi R_T\cos\lambda = 2,6 \cdot 10^3\,\text{km}}$.

⋆ Exercice 7 : Communication d'un satellite GPS avec la surface terrestre

1.



2. On note C le centre de la Terre assimilée à une sphère de rayon R_T. On détermine l'épaisseur e de la couche d'ionosphère traversée par les signaux GPS en appliquant le théorème de PYTHAGORE dans le triangle PCH rectangle en P.

$$D = \sqrt{(R_T + d)^2 - R_T^2} = \sqrt{2dR_T + d^2}$$

Dans le cas présent, $d^2/2dR_T \simeq 0,05$. En première approximation nous pouvons négliger d^2 devant $2dR_T$: $\boxed{D \simeq \sqrt{2dR_T}}$.

⋆⋆ Exercice 8 : Mouvement d'un anneau sur un cercle

1. Notons H le projeté orthogonal de M sur le segment $[CB]$. On a $CH = CM\cos\theta = R\cos\theta$. Par ailleurs :

$$z = BH = BC - CH = R - R\cos\theta \iff \boxed{z = R(1-\cos\theta)}$$

2. En utilisant le résultat de l'exercice 3 (angle au centre), on montre que $\widehat{CAM} = \frac{\theta}{2}$. Par un calcul analogue à celui de la question d) de l'exercice 2, on montre que $\ell = 2R\cos\frac{\theta}{2}$. Finalement, en utilisant la relation trigo de l'énoncé, on trouve :

$$\ell^2 = 4R^2\cos^2\frac{\theta}{2} = 4R^2\frac{1+\cos\theta}{2} \iff \boxed{\ell^2 = 2R^2(1+\cos\theta)}$$

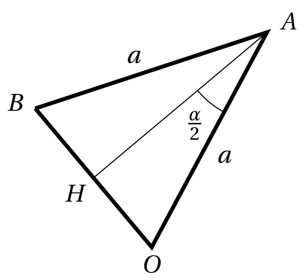
⋆⋆ Exercice 9 : Planche à voile

1. On calcule la hauteur issue du sommet symétrique A ainsi que la base OB :

$$AH = a\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad OB = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$$

On en déduit l'expression de la surface S :

$$S = \frac{AH\times OB}{2} = a^2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \iff \boxed{S = \frac{a^2}{2}\sin\alpha}$$

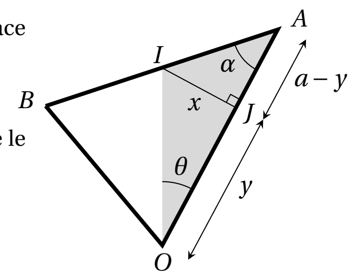


2. Avec les notations introduites sur le schéma ci-contre, la surface du triangle OIA s'écrit :

$$S' = \frac{ax}{2}$$

Pour déterminer la mesure x de la hauteur issue de I, on utilise le fait que celle-ci est commune aux triangles OIJ et AIJ :

$$x = y\tan\theta = (a-y)\tan\alpha$$



On détermine alors l'expression de y, puis celle de x :

$$y = \frac{a\tan\alpha}{\tan\alpha + \tan\theta} \quad \text{et} \quad x = \frac{a\tan\alpha\tan\theta}{\tan\alpha+\tan\theta} = \frac{a}{\cot\alpha + \cot\theta}$$

On obtient finalement :

$$\boxed{S' = \frac{a^2}{2(\cot\alpha + \cot\theta)}}$$

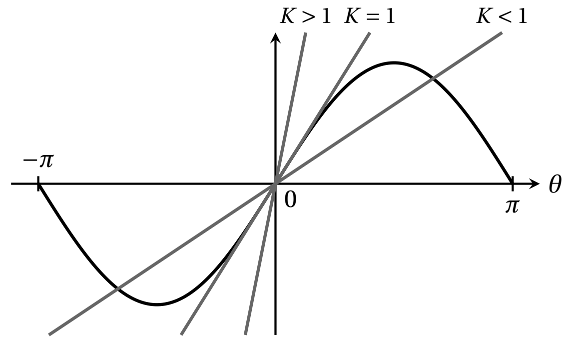
3. La surface S' est égale à la moitié de la surface totale S de la voile à condition que :

$$\frac{S}{S'} = \sin\alpha(\cot\alpha + \cot\theta) = 2 \iff \cos\alpha + \sin\alpha\cot\theta = 2$$
$$\iff \cot\theta = \frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\iff \boxed{\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}}$$

⋆ Exercice 10 : Résolution d'une équation par méthode graphique

1. $\boxed{f(0) = \sin(0) = 0}$ et $\boxed{f'(0) = \cos(0) = 1}$. Une solution évidente de l'équation est $\boxed{\theta = 0}$. La valeur de $f'(0)$ correspond **au coefficient directeur de la tangente au graphe de f en $\theta = 0$.**

2.

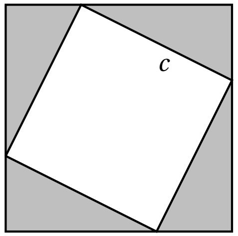


3. Dans le cas où $K \geq 1$, il n'y a aucune autre valeur que $\theta = 0$ pour laquelle $\sin\theta = K\theta$. $\theta = 0$ **est donc la seule solution de l'équation**.
En revanche, dans le cas où $K < 1$, on constate qu'**il existe, dans l'intervalle** $]-\pi,\pi]$**, en plus de** $\theta = 0$, **deux solutions non triviales, opposées l'une à l'autre**.

⋆⋆ Exercice 11 : Théorème de Pythagore

Dans un premier temps, on annote la figure pour introduire les grandeurs utiles (voir ci-après).

Le carré extérieur a pour aire : $(a+b)^2$.
Le carré intérieur a pour aire : c^2.
Chaque triangle grisé a pour aire : $\frac{ab}{2}$.



Le carré extérieur contient exactement le carré intérieur et les quatre triangles grisés, d'où :

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{ab}{2} \iff a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab \iff \boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

⋆⋆ Exercice 12 : Loi de Descartes

Le problème consiste à déterminer, connaissant la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r, la valeur de i qui permet d'obtenir une déviation D donnée.
On remarque tout d'abord que $i = D + r \iff r = i - D$. La condition vérifiée par l'angle i est donc :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin(i - D)$$

À partir de cette équation, notre objectif est d'isoler i et de l'exprimer en fonction de D, n_1 et n_2. On peut commencer par utiliser la relation trigonométrique suivante :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin(i - D) = n_2 (\sin i \cos D - \cos i \sin D)$$

Après factorisation, on obtient :

$$\sin i\,(n_2 \cos D - n_1) = n_2 \sin D \cos i \iff \boxed{\tan i = \frac{n_2 \sin D}{n_2 \cos D - n_1}}$$

L'application numérique donne $\boxed{i = 19{,}6°}$.