

Fiche d'exercices : Calcul

Exercice 1 Calculer la somme des n premiers entiers naturels impairs.

Exercice 2 Calculer $\sum_{k=1}^n (k+1)^3 - \sum_{k=1}^n k^3$ de deux manières différentes et en déduire $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 3 Retrouver la valeur de $\sum_{k=0}^n k$ en effectuant le changement d'indice $k = n - j$.

Exercice 4 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} ; \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} ; \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) ; \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i+j=n}} ij.$$

Exercice 5 Trouver un polynôme P tel que $P(x+1) - P(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 6 Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$ de deux manières différentes et en déduire $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 7 Donner une expression simple de $\prod_{k=1}^n u_k$ dans les cas suivants :

$$u_k = \frac{1}{2} ; u_k = k ; u_k = \frac{k}{k+1} ; u_k = 2^k ; u_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Exercice 8 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n (4k-2) = \prod_{k=n+1}^{2n} k$.

Exercice 9 Déterminer les trois derniers chiffres de l'écriture décimale de $\sum_{n=0}^{2021} n!$.

Exercice 10 Résoudre dans \mathbb{N} : $\binom{n}{5} = 17 \binom{n}{4}$; $\binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{3} = 23n$.

Exercice 11 Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{(mn)!}{(m!)^n n!}$.

1) Montrer que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \binom{mn+m-1}{m-1}$.

2) En déduire que pour tout n , a_n est un entier.

Exercice 12 Montrer que, pour tout entier naturel n , $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ est un entier.

Exercice 13 Montrer que, si $0 \leq p \leq n$, alors $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$.

Exercice 14 Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$. On pourra développer $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$.

Exercice 15 Calculer $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i}$.

Exercice 16 Calculer $1 + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n}$.

Exercice 17 Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. On pourra développer $(1+x)^{2n}$.

Exercice 18 Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases} ; \begin{cases} x - 4y - z = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases} ; \begin{cases} x - 4y - z = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ 3x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

Exercice 19 Résoudre le système $\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ (d'inconnues x, y, z).

Exercice 20 Montrer qu'il existe une unique parabole passant par les points de coordonnées respectives $(1, 2)$, $(2, -1)$ et $(3, 3)$ et en donner une équation.

Exercice 21

1) On munit le plan d'un repère cartésien.

a) Étudier l'intersection des droites $D_1 : 2x - 3y + 4 = 0$ et $D_2 : 3x - y - 1 = 0$.

b) Étudier l'intersection des droites $D_1 : x + y + 1 = 0$ et $D_2 : x + ay + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

2) On munit l'espace d'un repère cartésien.

a) Montrer que l'intersection des plans $P_1 : x + 5y + 6z - 4 = 0$ et $P_2 : 2x + 3y - 2z + 1 = 0$ est une droite, et en donner un point et un vecteur directeur.

b) Étudier l'intersection des plans $P_1 : x + y + z = 1$, $P_2 : x + ay + z = 1$ et $P_3 : x + y + bz = 1$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 22 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$x^2 + 3x - 5 = 0 ; x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0 ; x^4 - 8x^2 + 15 = 0.$$

Exercice 23 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$x^3 - 4x + \frac{5+3x}{x^2+x-2} > 2 ; \sqrt{2x+5} > x+1 ; |x-2| + |x+2| > 5.$$

Exercice 24

- 1) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy$, puis que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.
- 2) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $(x+y)^2 \geq 4xy$, puis que $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$.

Exercice 25 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x < y$. Montrer que :

$$x < \frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

Exercice 26 Simplifier $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

Exercice 27 Soient x_1, x_2, \dots, x_n des réels tels que $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = n$. Montrer que tous les x_i sont égaux à 1.

Exercice 28

- 1) Montrer que : $\forall x \in [0, 1], 0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$. Montrer que $\prod_{i=1}^n x_i \leq \frac{1}{2^n}$ ou $\prod_{i=1}^n (1-x_i) \leq \frac{1}{2^n}$.

Exercice 29 Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$$x \mapsto [x] ; x \mapsto x - [x] ; x \mapsto x [x].$$

Exercice 30 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $[x] + [x+1/2] = [2x]$.

Exercice 31 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $[x] = [x^2]$.

Exercice 32

- 1) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$.
- 2) En déduire la valeur de $\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \right]$.

Exercice 33

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 1 + [(2 + \sqrt{3})^n]$.
- 2) En déduire que l'entier $[(2 + \sqrt{3})^n]$ est impair.

Exercice 34

- 1) Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$ en utilisant $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ et les formules d'addition.
- 2) En déduire les cosinus, sinus et tangentes de $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$.

Exercice 35 Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ puis $\cos \frac{\pi}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 36 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\sin 2x = \tan x ; \cos 3x - \cos x = \cos 2x - 1$$
$$\cos \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} ; 2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0.$$

Exercice 37 Résoudre dans $[0, 2\pi]$ les inéquations suivantes :

$$\cos x \leq \frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x < 0 ; \cos 2x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} ; 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 > 0.$$

Exercice 38 Soit $P = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$. Calculer $P \sin \frac{\pi}{7}$ et en déduire que $P = -\frac{1}{8}$.