TD0 : Mesure, incertitudes - corrigé

Exercice 1 : Conversion d'unité

a) $0,01\,\text{cm}^2 = 0,01 \times \left(10^{-2}\right)^2\ \text{m}^2 = 1 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2$.

b) $\lambda = 589\,\text{nm} = 589 \times \left(10^{-9}\right)\ \text{m} = 5,89 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$.

c) $48\,\text{mm}^3 = 48 \times \left(10^{-3}\right)^3\ \text{m}^3 = 4,8 \cdot 10^{-8}\,\text{m}^3$.

d) $v = 30\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 30 \times \left(10^3\right) \times (3600)^{-1}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 8,3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

e) $\Phi = 1,5\,\text{mW}\cdot\text{cm}^{-2} = 1,5 \times \left(10^{-3}\right) \times \left(10^{-2}\right)^{-2}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2} = 15\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

Exercice 2 : Aire d'un cercle

L'aire du cercle vaut $\mathscr{A} = \pi R^2 = 84,9\,\text{cm}^2$. On détermine l'incertitude-type : $\frac{u(\mathscr{A})}{\mathscr{A}} = 2\frac{u(R)}{R} \iff u(\mathscr{A}) = 3,3\,\text{cm}^2$.

Le résultat s'écrit $\boxed{\mathscr{A} = 84,9\,\text{cm}^2\ ;\ u(\mathscr{A}) = 3,3\,\text{cm}^2}$. L'incertitude-type relative vaut $\boxed{\frac{u(\mathscr{A})}{\mathscr{A}} = 3,8\,\%}$.

Exercice 3 : Mesurage d'une résistance

1. On rappelle que le calibre optimal est celui qui est situé **immédiatement au-dessus de la valeur affichée**. Il s'agit donc du calibre 20V pour la tension et 200 mA pour l'intensité. On lit dans la notice les paramètres pour calculer l'incertitude-type sur U $(0,5\% \pm 2d)$ et sur I $(1\% \pm 2d)$; on obtient alors :

$$u(U) = \frac{5\cdot 10^{-3} \times 6,175 + 2 \times 0,001}{\sqrt{3}} = 0,019\,\text{V} \quad ; \quad u(I) = \frac{10^{-2} \times 27,88 + 2 \times 0,01}{\sqrt{3}} = 0,17\,\text{mA}$$

On détermine la valeur de la résistance à l'aide de la loi d'Ohm : $R = U/I = 221,48\,\Omega$. On détermine enfin son incertitude-type composée :

$$\frac{u(R)}{R} = \sqrt{\left(\frac{u(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I}\right)^2} \iff u(R) = 1,5\,\Omega$$

La mesure de la résistance est donc $\boxed{R = 221,5\,\Omega\ ;\ u(R) = 1,5\,\Omega}$.

2. On utilise cette fois-ci le calibre $2\,\text{k}\Omega$ et les paramètres sont $(0,8\% \pm 5d)$. On calcule l'incertitude-type sur R :

$$u(R) = \frac{8\cdot 10^{-3} \times 218,7 + 5 \times 0,1}{\sqrt{3}} = 1,3\,\Omega$$

On calcule ensuite l'écart normalisé entre les deux valeurs expérimentales :

$$\text{EN} = \frac{221,5 - 218,7}{\sqrt{1,5^2 + 1,3^2}} = 1,4 < 2$$

L'écart normalisé est inférieur à deux ; **les deux valeurs sont compatibles entre elles**.

Exercice 4 : Homogénéité

1. On effectue une analyse dimensionnelle de la quantité α : $[\alpha] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{\text{MLT}^{-2}}{\text{LT}^{-1}} = \text{MT}^{-1}$.

α s'exprime en $\boxed{\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}}$.

2. On vérifie que la relation b) est homogène : $\frac{[m]}{[\alpha]} = \frac{\text{M}}{\text{MT}^{-1}} = \text{T}$. $\frac{m}{\alpha}$ **est homogène à un temps**.

3. On vérifie que la relation c) est homogène : $\frac{[mg]}{[\alpha]} = \frac{\text{MLT}^{-2}}{\text{MT}^{-1}} = \text{LT}^{-1}$. $\frac{mg}{\alpha}$ **est homogène à une vitesse**.

Exercice 5 : Satellite en mouvement circulaire

On rappelle que l'on peut retrouver la dimension de G en écrivant l'expression de la force gravitationnelle entre deux masses. On écrit la relation attendue sous la forme d'une équation aux dimensions :

$$\text{LT}^{-1} = \left(\text{L}^3\text{M}^{-1}\text{T}^{-2}\right)^{\alpha}\text{M}^{\beta}\text{L}^{\gamma} = \text{M}^{-\alpha+\beta}\text{L}^{3\alpha+\gamma}\text{T}^{-2\alpha}$$

On cherche donc à résoudre le système ci-après :

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 0 \\ 3\alpha + \gamma = 1 \\ -2\alpha = -1 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = -\frac{1}{2}$.

La relation attendue est la suivante : $\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}}$.

⋆ Exercice 6 : Test de condensateurs du commerce

1. On obtient rapidement les valeurs avec le mode statistique de la calculatrice :

$$\boxed{\overline{C} = 79,84\,\text{nF}} \quad ; \quad \boxed{\sigma_C = 4,0\,\text{nF}}$$

2. Comme on l'a vu en cours : $\boxed{u(\overline{C}) = \sigma_C/\sqrt{20} = 0,90\,\text{nF}}$. On calcule l'écart normalisé :

$$\text{EN} = \frac{80 - 79,84}{0,9} = 0,18$$

Sa valeur est très inférieure à deux ; on conclut que l'on peut faire confiance à la valeur de 80 nF proposée par le fabricant.

3. On applique la formule : $\boxed{u(\sigma_C) = 0,64\,\text{nF}}$. Sachant que la tolérance affichée est de 5%, on attend en théorie comme écart-type sur la valeur de C :

$$\sigma_C^{\text{théo}} = \frac{80 \times 0,05}{\sqrt{3}} = 2,3\,\text{nF}$$

On calcule l'écart normalisé :

$$\text{EN} = \frac{4,0-2,3}{0,64} = 2,7$$

Sa valeur est supérieure à deux ; on conclut que le fabricant a très probablement **sous-estimé** la tolérance de son produit (à condition qu'il n'y ait pas eu de biais dans les mesurages).

⋆ Exercice 7 : Longueur capillaire

1. A est homogène à une énergie surfacique donc $[A] = \frac{[E]}{\text{L}^2} = \frac{\text{ML}^2\text{T}^{-2}}{\text{L}^2} = \text{MT}^{-2}$. On rappelle que vous devez savoir retrouver très rapidement la dimension d'une énergie (à partir de la définition de l'énergie cinétique par exemple).

On fait l'hypothèse que la relation attendue est de la forme : $D_c = A^\alpha \rho^\beta g^\gamma$. Écrivons-là sous la forme d'une équation aux dimensions

$$\text{L} = \left(\text{MT}^{-2}\right)^\alpha \left(\text{ML}^{-3}\right)^\beta \left(\text{LT}^{-2}\right)^\gamma = \text{M}^{\alpha+\beta}\text{L}^{-3\beta+\gamma}\text{T}^{-2\alpha-2\gamma}$$

Il s'agit désormais de résoudre le système ci-dessous :

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 0 & (1) \\ \gamma - 3\beta = 1 & (2) \\ -2\alpha - 2\gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

En écrivant $2\times(1) + 2\times(2) + (3)$, on élimine à la fois α et γ : $-4\beta = 2 \iff \beta = -\frac{1}{2}$. On trouve ensuite $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\gamma = -\frac{1}{2}$. La relation attendue est la suivante : $\boxed{D_c = \sqrt{\frac{A}{\rho g}}}$.

2. Pour l'eau, la longueur capillaire vaut : $\boxed{D_c = 2,7\,\text{mm}}$.

⋆⋆ Exercice 8 : Éolienne

1. On fait l'hypothèse que la relation recherchée est une loi de puissance : $\mathscr{P} = \text{Cste} \times \rho^\alpha v^\beta D^\gamma$ et on écrit l'équation aux dimensions associées :

$$\text{ML}^2\text{T}^{-3} = \left(\text{ML}^{-3}\right)^\alpha \left(\text{LT}^{-1}\right)^\beta \text{L}^\gamma = \text{M}^\alpha\text{L}^{-3\alpha+\beta+\gamma}\text{T}^{-\beta}$$

La résolution du système donne $\alpha = 1$, $\beta = 3$ et $\gamma = 2$. La relation recherchée est $\boxed{\mathscr{P} = \text{Cste} \times \rho D^2 v^3}$. En toute logique la puissance fournie par une éolienne est proportionnelle à la masse d'air qui circule à travers la surface du rotor, par unité de temps. Pour simplifier on peut assimiler cette surface à un disque de diamètre D, dont l'aire est proportionnelle à D^2. On pouvait donc s'attendre à ce que la puissance soit proportionnelle à D^2, ce qui est cohérent avec le résultat de l'analyse dimensionnelle.

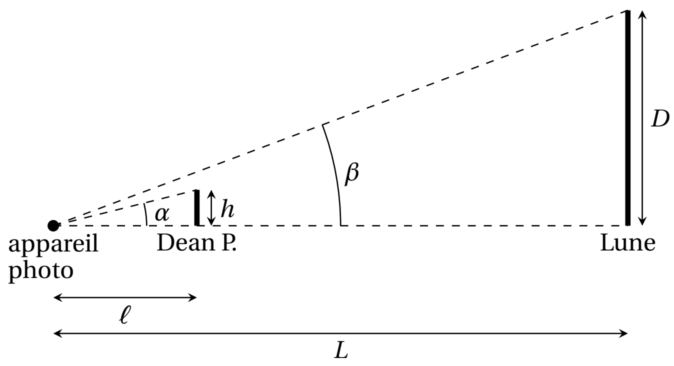
2. Soient respectivement $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les puissance développées pour des vitesses $v_1 = 24$ nœuds et $v_2 = 20$ nœuds. Alors :

$$\frac{\mathscr{P}_1}{\rho D^2 v_1^3} = \frac{\mathscr{P}_2}{\rho D^2 v_2^3} \iff \boxed{\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_1 \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 = 4,1\cdot 10^2\,\text{W}}$$

⋆⋆⋆ Exercice 9 : Mesure de distance

Ceci est une proposition de corrigé ; il n'y a pas une façon unique de répondre à cette problématique.

Il s'agit de déterminer la distance ℓ qui sépare le photographe du personnage. Ce dernier est placé dans la direction de la Lune ; on va se servir de cette perspective pour obtenir des informations sur les distances. On note h la taille du personnage, L la distance Terre-Lune et D le diamètre lunaire. On note également α et β les tailles angulaires respectivement du personnage et de la Lune. On représente schématiquement la situation, de manière simplifiée (on aligne les pieds du personnage avec une extrémité du disque lunaire et on ne respecte pas ici les échelles). Dans cette modélisation, on assimile l'appareil photo à un point.



Pour obtenir la valeur de ℓ, on s'appuie sur la photographie. On note h_ph la taille du personnage et D_ph le diamètre lunaire, mesurés sur la photo. On admet que l'appareil photo conserve les proportions, c'est-à-dire que **la taille d'un élément mesurée sur l'image est proportionnelle à sa taille angulaire**. Ainsi, on peut écrire que :

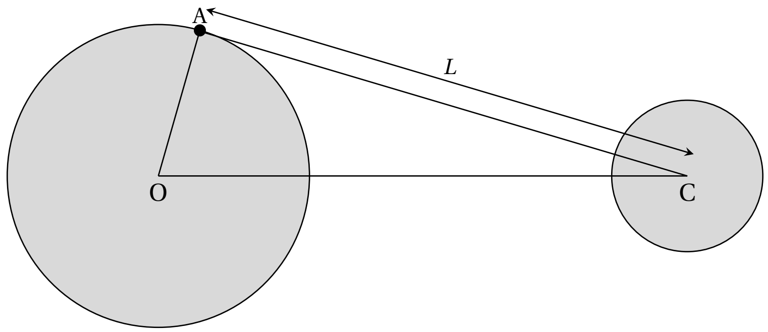
$$\frac{h_\text{ph}}{D_\text{ph}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Par ailleurs, d'après le schéma ci-dessus, on peut écrire que $\tan\alpha = \frac{h}{\ell}$ et $\tan\beta = \frac{D}{L}$. Dans la situation qui nous intéresse, les angles α et β sont faibles de sorte que l'on peut faire l'approximation $\tan\alpha \simeq \alpha$ et $\tan\beta \simeq \beta$. On obtient alors :

$$\frac{h_\text{ph}}{D_\text{ph}} = \frac{\alpha}{\beta} \simeq \frac{hL}{D\ell} \iff \boxed{\ell = \frac{hLD_\text{ph}}{Dh_\text{ph}}}$$

Il reste à déterminer les valeurs des différents paramètres.

- on trouve sur internet la taille de Dean Potter : 1,96 m. On voit sur l'image qu'il est légèrement voûté ; on n'est pas non plus certain de voir la base de ses pieds. On propose du coup une valeur légèrement inférieure : $h = 1,91$ m ;
- pour déterminer la distance entre l'appareil photo (noté ici A) et la Lune, faisons une construction schématique. On constate que la Lune se situe quasiment sur l'horizon, ce qui devrait correspondre à peu près à cette configuration (là encore, les échelles ne sont pas respectées) :



Le disque lunaire vu sur la photo se situe dans un plan passant par le centre de la Lune. La distance L correspond donc à la distance entre A et C. Comme la Lune se trouve à une distance de la Terre beaucoup plus grande que son rayon, on peut faire l'approximation que L est environ égale à la distance entre le centre de la Terre et celui de la Lune (autrement dit on fait l'approximation $L \simeq \mathrm{OC}$). Il reste à trouver la valeur de cette distance, **à la date où la photo a été prise** (cette distance varie notablement au cours du temps car l'orbite de la Lune est elliptique). Après une recherche sur internet, on trouve $L = 3,74 \cdot 10^5$ km ;

- Une nouvelle recherche sur internet nous permet d'obtenir la valeur du diamètre lunaire : $D = 3,47 \cdot 10^3$ km ;
- On mesure à la règle graduée (au millimètre) sur la photographie : $h_{\mathrm{ph}} = 1,25$ cm et $D_{\mathrm{ph}} = 9,80$ cm.

On aboutit finalement à la valeur numérique suivante :

$$\boxed{\ell = 1,614\,\mathrm{km}}$$

Passons maitenant à l'estimation des incertitudes :

- la valeur du diamètre lunaire est connue avec une excellente précision, on néglige l'incertitude sur D ;
- la taille h a été déterminée "à vue de nez" en tenant compte de la position voutée du personnage et de la perspective qui empêche peut-être de voir l'extrémité basse de son corps. On estime prudemment que l'incertitude-type sur cette valeur vaut $u(h) = 2,0$ cm.
- la distance Terre-Lune varie au cours de la journée : la valeur retenue ne correspond pas forcément à la date exacte de la prise de vue. Si l'on regarde la valeur la veille (le 10 juillet 2011), on trouve $3,70 \cdot 10^5$ km. On estime que l'incertitude prend la forme d'une loi uniforme continue de largeur $\Delta = 3,74 \cdot 10^5 - 3,70 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^3$ km. L'incertitude-type sur L vaut alors $u(L) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = 1,2 \cdot 10^3$ km ;
- La valeur h_{ph} est mesurée à la règle dans de bonnes conditions ; on estime que $u(h_{\mathrm{ph}}) = \frac{1\,\mathrm{grad}}{\sqrt{12}} = 0,29$ mm. Pour la longueur D_{ph}, c'est plus compliqué : il est difficile de déterminer exactement deux points diamétralement opposés car d'une part on ne voit pas le centre du disque et d'autre part la Lune n'est pas parfaitement pleine (elle est "gibbeuse") ; on doit en tenir compte dans l'estimation de l'incertitude et on propose $u(D_{\mathrm{ph}}) = 0,50$ mm.

On effectue un calcul d'incertitude-type composée pour cette relation qui a la forme d'une loi de puissance :

$$\frac{u(\ell)}{\ell} = \sqrt{\left(\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{u(D_{\mathrm{ph}})}{D_{\mathrm{ph}}}\right)^2 + \left(\frac{u(h_{\mathrm{ph}})}{h_{\mathrm{ph}}}\right)^2} \Longleftrightarrow \boxed{u(\ell) = 0,042\,\mathrm{km}}$$

On termine cet exercice en écrivant le résultat final avec le bon nombre de chiffres significatifs :

$$\boxed{\ell = 1,614\,\mathrm{km}\ ;\ u(\ell) = 0,042\,\mathrm{km}}$$

On aimerait bien savoir si cette valeur est pertinente, alors lisons un extrait de cet article (source : le lien vers l'article en ligne est aujourd'hui obsolète!) : "S'il y avait un rider ultime, Dean Potter pourrait postuler à ce titre honorifique. Cet Américain de 40 ans a déjà pratiqué l'alpinisme, le base jump, le wingsuit, la slackline, l'escalade et la highline. C'est une référence des sports extrêmes et il cumule de nombreux exploits et record dans toutes ces disciplines comme par exemple le record du plus long saut en base jump du monde en 2008. Le National Geographic lui a consacré l'année dernière un documentaire de 48 minutes intitulé "l'homme qui peut voler" et que vous pouvez revoir en intégralité ici. Dans ce film, on peut notamment voir une séquence du rider sur la Cathedral Peak, en highline. Filmé à 1,6 km par les équipes du film dirigé par Michael Schaefer avec un objectif de 800 mm, la séquence est magique avec la lune qui se lève en toile de fond."

Malgré un certain nombre d'approximations, notre estimation semble pertinente! On ne se risquera pas à calculer un écart normalisé car on ne connaît pas la précision sur la valeur donnée dans l'article (d'autres sources parlent de 1,5 km ou encore plus de 1,6 km).