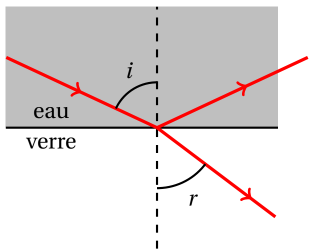
TD1 : Lois de Snell-Descartes - corrigé

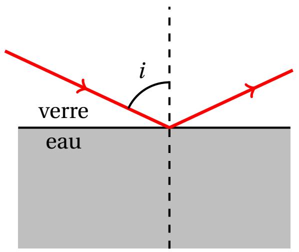
Exercice 1 : Dioptre verre-eau

Dans le premier cas (réfraction de l'eau vers le verre), $n_{\text{verre}} > n_{\text{eau}}$ donc il y a forcément un rayon réfracté. On détermine sa direction à l'aide de la loi de la réfraction : $\boxed{\boldsymbol{r = \arcsin\left(\frac{n_{\text{eau}}}{n_{\text{verre}}}\sin i\right) = 53°}}$.

Dans le deuxième cas (réfraction du verre vers l'eau), il est possible qu'il y ait réflexion totale. On vérifie si c'est le cas en calculant l'angle de réflexion totale : $I_{\text{tot}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{eau}}}{n_{\text{verre}}}\right) = 62°$. L'angle d'incidence est supérieur à I_{tot}, **il y a effectivement réflexion totale sur le dioptre**.

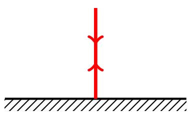
On représente schématiquement ci-dessous les deux situations :

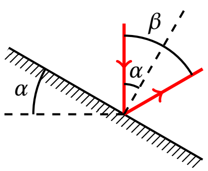




⋆ Exercice 2 : Rotation d'un miroir plan

On représente schématiquement ci-dessous les deux situations :





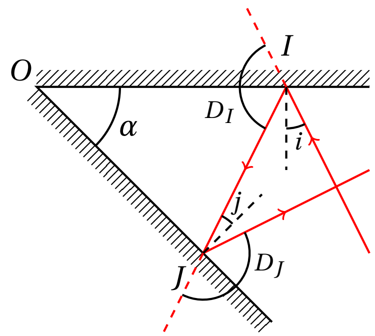
Par rotation du miroir d'un angle α, on reconnaît que le rayon incident arrive désormais avec un angle d'incidence α sur le miroir. D'après la loi de la réflexion, on reconnaît aisément que la déviation angulaire β du rayon réfléchi vérifie : $\boxed{\boldsymbol{\beta = 2\alpha}}$.

⋆ Exercice 3 : Prisme à réflexion totale

Le rayon arrive sous incidence normale sur le premier dioptre air/verre. Par conséquent, il entre dans le prisme **sans être dévié**. Ensuite, il poursuit sa marche jusqu'à atteindre l'hypothénuse (dioptre verre/air). Sachant que l'indice du verre est plus élevé que celui de l'air, il est possible qu'il y ait réflexion totale, **à condition que l'angle d'incidence soit tel que $\boldsymbol{i > I_{\text{tot}}}$** (ou encore que **$\boldsymbol{\sin i > \frac{1}{n}}$**).
Le prisme est à la fois rectangle et isocèle, ce qui permet d'affirmer que $i = \frac{\pi}{4}$. Dans ces conditions, il y a réflexion totale sur l'hypothénuse si :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{n} \iff \boxed{\boldsymbol{n > \sqrt{2}}}$$

⋆ Exercice 4 : Déviation par un système de deux miroirs



1. D'après la figure ci-dessus et en utilisant la loi de la réflexion en I, on montre que :

$$D_I + 2i = \pi \iff \boxed{\boldsymbol{D_I = \pi - 2i}}$$

De la même manière, on peut montrer que $\boxed{\boldsymbol{D_J = \pi - 2j}}$.

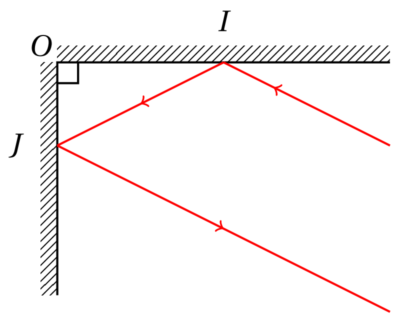
2. En utilisant les normales aux points I et J, on voit aisément que $\widehat{OIJ} = \frac{\pi}{2} - i$ et $\widehat{OJI} = \frac{\pi}{2} - j$. En sommant les angles du triangle OIJ, on obtient :

$$\alpha + \frac{\pi}{2} - i + \frac{\pi}{2} - j = \pi \iff \boxed{\boldsymbol{\alpha = i + j}}$$

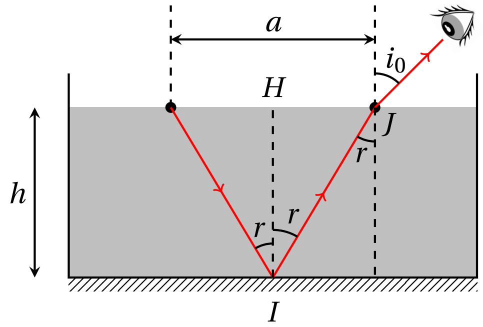
3. La déviation totale est la somme des déviations successives en I et J :

$$D = D_I + D_J = 2\pi - 2i - 2j \iff \boxed{\boldsymbol{D = 2(\pi - \alpha)}}$$

4. Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$ alors $D = \frac{3\pi}{2}$. Le rayon émergent est **orthogonal** au rayon incident (voir figure ci-dessus).
Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alors $D = \pi$. Le rayon émergent est **parallèle** au rayon incident, mais se propage **en sens opposé** (voir figure ci-dessous).



★ Exercice 5 : Mesure de l'indice de réfraction d'un liquide



1. On montre, avec le tracé ci-dessus, que si la valeur de h est bien choisie alors l'observateur, en regardant dans la direction du fil le plus proche, voit se superposer à ce fil l'image de l'autre fil, formée par le système optique constitué de l'épaisseur de liquide et du miroir plan.

2. D'après la loi de la réfraction en J : $n \sin r = \sin i_0$. Dans le triangle IJH rectangle en H, on peut écrire :

$$\sin r = \frac{HJ}{IJ} = \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2+h^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+4h^2}} \iff \boxed{\boldsymbol{n = \frac{\sin i_0}{\sin r} = \sin i_0 \sqrt{1+\frac{4h^2}{a^2}}}}$$

AN : $\boxed{\boldsymbol{n = 1{,}33}}$.

★★ Exercice 6 : Dispersion de la lumière par un prisme

1. Les lois de la réfraction en I et J s'écrivent :

$$\boxed{\boldsymbol{\sin i = n \sin r}} \quad \text{et} \quad \boxed{\boldsymbol{\sin i' = n \sin r'}}$$

2. Notons O le sommet du prisme d'angle A. On remarque que $\widehat{OIJ} = \frac{\pi}{2} - r$ et $\widehat{OJI} = \frac{\pi}{2} - r'$. En sommant les angles de OIJ, on obtient :

$$A + \frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} - r' = \pi \iff \boxed{\boldsymbol{A = r + r'}}$$

3. Lors de l'entrée dans le prisme, le rayon suibit une première déviation $D_I = i - r$. En sortant du prisme, il est à nouveau d'vié d'un angle $D_J = i' - r'$. La déviation totale vaut :

$$D = D_I + D_J = i + i' - r - r' \iff \boxed{\boldsymbol{D = i + i' - A}}$$

4. On démontre avec un raisonnement par l'absurde que **$i = i'$ au minimum de déviation**. Imaginons que l'on observe un minimum de déviation unique D_m, pour un angle d'incidence i tel que $i' \neq i$. D'après le principe de retour inverse de la lumière, le rayon qui entre dans le prisme avec un angle i' est lui aussi dévié de l'angle D_m. Par conséquent, le minimum de déviation n'est pas unique, il y a contradiction. Au minimum de déviation, i et i' sont donc nécessairement identiques.

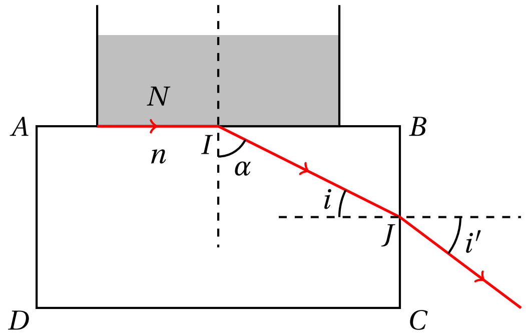
5. Au minimum de déviation $i = i'$ donc $\boxed{\boldsymbol{D_m = 2i - A}}$.

6. On a montré à la question 1 que $\sin i = n \sin r$ et $\sin i' = n \sin r'$. Puisque $i = i'$, on peut également dire que $r = r' = \frac{A}{2}$ au minimum de déviation. En utilisant le résultat de la question précédente, on arrive à la conclusion que :

$$\boxed{\boldsymbol{n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin\left(\frac{D_m+A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}}$$

8. Une radiation lumineuse est d'autant plus déviée que le prisme est réfringent, c'est-à-dire que son indice de réfaction est élevé. D'après la loi de Cauchy, l'indice de réfraction est une fonction décroissante de la longueur d'onde. Par conséquent, **la couleur la plus déviée est le violet et la moins déviée le rouge**.

★★ Exercice 7 : Réfractomètre d'Abbe



1. Puisque le rayon se réfracte en I sous incidence rasante, alors $\alpha = I_{\text{lim}} \iff \sin\alpha = \frac{N}{n}$. Le rayon arrive ensuite en J avec un angle d'incidence $i = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Il se réfracte en J à condition qu'il n'y ait pas réflexion totale, c'est-à-dire que : $\sin i \leq \frac{1}{n}$.

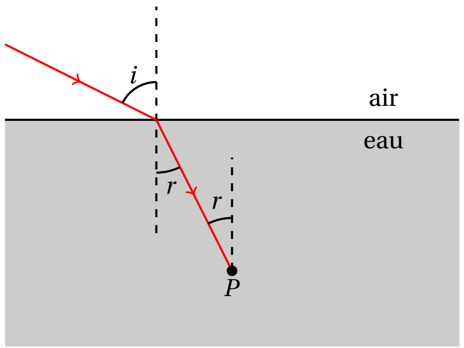
On transforme cette inégalité en utilisant $\sin i = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{N}{n}\right)^2}$. Finalement, la condition d'émergence en J peut s'écrire :

$$\sqrt{1 - \left(\frac{N}{n}\right)^2} \leq \frac{1}{n} \iff \boxed{\boldsymbol{n^2 - N^2 \leq 1}}$$

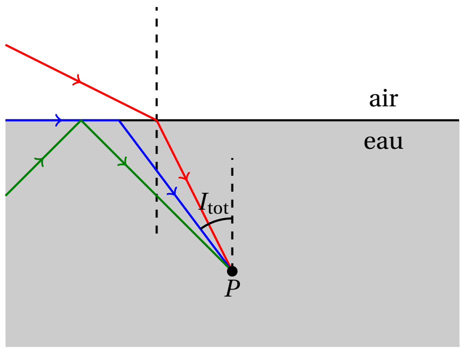
2. D'après la loi de la réfraction en J : $\sin i = \sqrt{1 - \left(\frac{N}{n}\right)^2} = \frac{\sin i'}{n} \iff \sin^2 i' = n^2 - N^2$. On en déduit que $\boxed{\boldsymbol{N = \sqrt{n^2 - \sin^2 i'} = 1{,}713}}$.

⋆⋆ Exercice 8 : Puit de lumière subaquatique

On assimile le plongeur à un point matériel P situé sous l'eau et qui regarde en direction de la surface. On cherche à quelle condition un rayon lumineux issu de l'atmosphère peut se réfracter à la surface de l'eau et arriver jusqu'au plongeur. On représente graphiquement la situation sur le schéma ci-dessous.



La situation est possible tant que $r \leq I_{\text{tot}} = \arcsin\left(\frac{1}{n_{\text{eau}}}\right)$. Au-delà, les rayons qui arrivent à l'œil de l'observateur ne peuvent pas venir de l'extérieur de l'eau. Ils viennent du fond de la mer et atteignent le plongeur en se réfléchissant totalement à la surface de l'eau, comme le montre la figure ci-dessous (rayon vert).



En conclusion, le disque lumineux vu par le plongeur est formé par les rayons lumineux venant de l'atmosphère et qui se réfractent à la surface de l'eau avant d'atteindre son œil. Ces rayons sont compris à l'intérieur d'un cône dont le sommet est confondu avec le plongeur et dont le rayon angulaire est égal à l'angle de réflexion totale $\boldsymbol{I_{\text{tot}} = \arcsin\left(\frac{1}{n_{\text{eau}}}\right)}$.
En prenant comme valeur numérique $n_{\text{eau}} = 1,33$, on obtient $I_{\text{tot}} = 49°$.
Autour du disque lumineux, la luminosité est beaucoup plus faible car le rayonnement lumineux venant du fond marin est infime comparé à celui qui vient de l'extérieur de l'eau.