Correction du DNS 1

EXERCICE 1

1) L'ensemble de définition de l'équation est $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. Pour tout réel $x \in D$:

$$\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = 2 + x \Leftrightarrow x + 2 = 2x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est 9 et ses racines sont -2 et 1, mais $-2 \notin D$ donc la seule solution de l'équation est 1.

2) L'ensemble de définition de l'équation est $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$ on a, en multipliant par $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x}.$$

Si $x < 1$ alors $x - 1 < 0$ et cette égalité est impossible. Si $x \geqslant 1$ alors $x - 1 \geqslant 0$ donc :

$$x - 1 = \sqrt{x} \Leftrightarrow (x-1)^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est 9 et ses racines sont $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \geqslant 1$, donc la seule solution de l'équation est $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

3) Posons $X = e^x$. L'équation devient

$$X^2 - 5X + 6 = 0.$$

C'est une équation du second degré dont les racines sont 2 et 3. Or

$$e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \qquad \text{et} \qquad e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$$

donc les solutions de l'équation sont $\ln 2$ et $\ln 3$.

EXERCICE 2

On raisonne par récurrence.

Pour $n = 1$ la somme vaut 1 et $\dfrac{3n}{2n+1} = 1$ donc l'inégalité est vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \geqslant \frac{3n}{2n+1}$$

et montrons que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant \frac{3n+3}{2n+3}.$$

On a :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Pour pouvoir conclure, il suffit donc de montrer que $\dfrac{3n}{2n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant \dfrac{3n+3}{2n+3}$. Étudions le signe de la différence :

$$\begin{aligned}\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3n+3}{2n+3} &= \frac{3n(n+1)^2(2n+3) + (2n+1)(2n+3) - (3n+3)(n+1)^2(2n+1)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{n^2+2n}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} \text{ (après simplification).}\end{aligned}$$

Cette quantité est positive, donc on a bien $\dfrac{3n}{2n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant \dfrac{3n+3}{2n+3}$.

D'après le théorème de récurrence, l'inégalité à démontrer est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 3

1) On peut remarquer que la fonction f est impaire : on a $f(-x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}} = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux de dérivabilité, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$$

et, puisque f est impaire,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

Une équation de la tangente à l'origine à la courbe de f est $y = f'(0)(x-0)+f(0)$, soit $y = x$. Pour étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente, on étudie le signe de $f(x) - x$:

$$f(x) - x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - x = \frac{x - x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(1-\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$$

qui est du signe de $-x$ car $1-\sqrt{1+x^2}$ est négatif et ne s'annule qu'en 0. Ainsi la courbe est au-dessus de la tangente sur $]-\infty, 0]$ et en-dessous sur $[0, +\infty[$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

et de même on trouve

$$f(f(f(x))) = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} \qquad \text{et} \qquad f(f(f(f(x)))) = \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}.$$

Notons $f_n(x) = f(f(\dots(f(x))\dots))$ (avec n fois f). On peut conjecturer que

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrons-le par récurrence.

Pour $n = 1$ on a bien $f_1(x) = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. Alors

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = \frac{f_n(x)}{\sqrt{1+f_n(x)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1+nx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}.$$

D'après le théorème de récurrence, la formule conjecturée est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 4

Les premiers termes de la suite sont $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = \dfrac{u_1^2}{u_0} = 4$, $u_3 = \dfrac{u_2^2}{u_1} = 8$, $u_4 = \dfrac{u_3^2}{u_2} = 16$, etc. On peut ainsi conjecturer que $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons-le par récurrence double.

On a bien $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 2 = 2^1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = 2^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+1}$ et montrons que $u_{n+2} = 2^{n+2}$. On a :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = \frac{(2^{n+1})^2}{2^n} = \frac{2^{2n+2}}{2^n} = 2^{n+2}.$$

Par le théorème de récurrence double, on a donc bien $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 5

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons qu'il existe deux fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que g est constante, $h(0) = 0$ et $f = g + h$.

Alors $f(0) = g(0) + h(0) = g(0)$. Or g est constante, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = g(0) = f(0),$$

et donc

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0).$$

Si g et h existent, elles sont donc uniques.

Synthèse : Posons $g(x) = f(0)$ et $h(x) = f(x) - f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors g est constante, $h(0) = f(0) - f(0) = 0$ et $g(x) + h(x) = f(0) + f(x) - f(0) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les fonctions g et h conviennent.