Devoir n°2 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. Calculer

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)^2.$$

On essaiera de factoriser le plus possible le résultat.

EXERCICE 2

- 1) Soient $n, q \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq q$. En raisonnant par récurrence sur n , montrer que $\sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.
- 2) En prenant $q = 1$, $q = 2$ puis $q = 3$, en déduire les valeurs de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=2}^n k(k-1)$, $\sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)$.

EXERCICE 3

Pour tout entier naturel n non nul on considère les sommes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k)}.$$

- 1) Calculer S_n , T_n et U_n pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ (détailler les calculs).
- 2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $S_{n+1} - S_n$, $T_{n+1} - T_n$ et $U_{n+1} - U_n$.
b) En déduire que $S_n = T_n = U_n$ pour tout entier naturel n non nul.
- 3) Pour tout réel $x > 1$ on pose $f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$ et $g(x) = \ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x}$.
a) Étudier les variations des fonctions f et g sur l'intervalle $]1, +\infty[$. On précisera leurs limites en 1 et en $+\infty$.
b) En déduire que, pour tout réel $x > 1$, on a l'encadrement :

$$\ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x} \leq \ln x - \ln(x-1).$$

- 4) Déduire de cet encadrement que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^n (\ln(n+k+1) - \ln(n+k)) \leq T_n \leq \sum_{k=1}^n (\ln(n+k) - \ln(n+k-1)).$$

- 5) En déduire la limite de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.