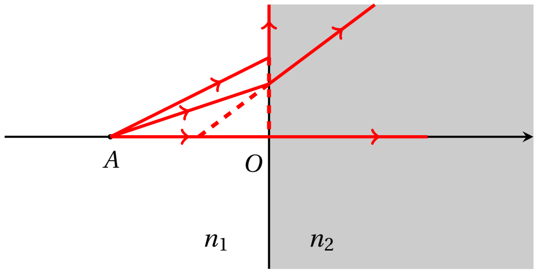
⋆ Exercice 1 : Image par un dioptre plan

1.



Les trois rayons réfractés (et leurs prolongements) ne se coupent pas au même point de l'espace. Par conséquent, le point A n'a pas de conjugué par le dioptre plan. **Le dioptre plan n'est pas rigoureusement stigmatique**.

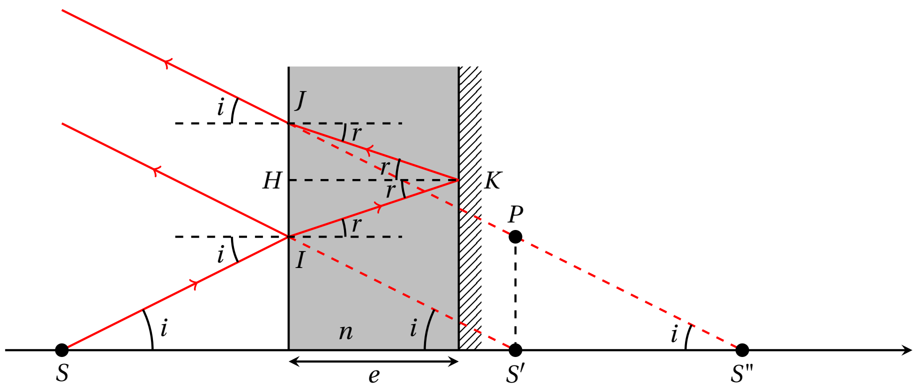
2. Notons I le point d'incidence. Dans le triangle OAI, $\widehat{OAI} = i$ (angles alterne-internes) et $\tan i \simeq i = -\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}}$ (signe $-$ car $\overline{OA} < 0$).
Dans le triangle $OA'I$, $\widehat{OA'I} = r$ (angles correspondants) et $\tan r \simeq r = -\frac{\overline{OA'}}{\overline{OI}}$.
De ces deux équations, on déduit que : $OI = -r\overline{OA'} = -i\overline{OA} \iff \boxed{\overline{OA} = r\overline{OA'}}$.

3. D'après la loi de la réfraction en I : $n_1 \sin i = n_2 \sin r \iff n_1 i = n_2 r$.
En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{i}{r} = \frac{n_2}{n_1} \iff \boxed{\frac{\overline{OA'}}{n_2} = \frac{\overline{OA}}{n_1}}$$

⋆⋆ Exercice 2 : Réflexion sur une lame de verre

1. et 2.



3. Pour déterminer la distance $\overline{S'S"}$, commençons par remarquer que $S'P = IJ$ et que $\tan i = \frac{S'P}{S'S"}$ (triangle $S'S"P$).
Dans les conditions de Gauss, on peut donc utiliser l'approximation suivante : $\overline{S'S"} = \frac{IJ}{i}$.
L'étape suivante consiste à déterminer l'expression de IJ. On remarque que $IJ = 2IH$, avec $\tan r \simeq r = \frac{IH}{e} \iff IJ = 2er$.
La loi de la réfraction en I s'écrit $\sin i = n \sin r$, ou encore dans les conditions de Gauss, $i = nr$.
Des résultats précédents, on déduit que : $\boxed{\overline{S'S"} = \frac{2er}{i} = \frac{2e}{n}}$.

⋆⋆ Exercice 3 : Dioptre sphérique

1. Dans les triangles AHI et CHI, on peut écrire :

$$\tan\alpha \simeq \alpha = -\frac{\overline{HI}}{\overline{HA}} \simeq -\frac{\overline{HI}}{\overline{OA}} \quad \text{et} \quad \tan\gamma \simeq \gamma = \frac{\overline{HI}}{\overline{HC}} \simeq \frac{\overline{HI}}{R}$$

ce qui revient à dire que : $\overline{HI} = -\alpha\overline{OA} = \gamma R \iff \boxed{\gamma = -\frac{\overline{OA}}{R}\alpha}$.

2. Dans le triangle AIC, $\widehat{AIC} = \pi - i$. En sommant les angles de ce triangle, on montre que :

$$\alpha + \pi - i + \gamma = \pi \iff \boxed{i = \alpha + \gamma}$$

3. Dans le triangle ICA', $\widehat{ICA'} = \pi - \gamma$. En sommant les angles de ce triangle, on montre que :

$$r + \pi - \gamma + \beta = \pi \iff \boxed{\gamma = r + \beta}$$

On en déduit que $\beta = \gamma - r = -\frac{\overline{OA}}{R}\alpha - r$. D'après la loi de la réfraction en I : $i = nr$ (dans les CG), ce qui amène à :

$$\beta = -\frac{\overline{OA}}{R}\alpha - \frac{i}{n} = -\frac{\overline{OA}}{R}\alpha - \frac{1}{n}(\alpha + \gamma) = -\frac{\overline{OA}}{R}\alpha - \frac{1}{n}\left(\alpha - \frac{\overline{OA}}{R}\alpha\right)$$

Après simplifications, on obtient la relation suivante : $\boxed{\beta = -\frac{\alpha}{n}\left[\frac{(n-1)\overline{OA}}{R} + 1\right]}$.

4. Dans le triangle $A'HI$, on peut écrire : $\tan\beta \simeq \beta = -\frac{\overline{HI}}{\overline{HA'}} \simeq \frac{\overline{HI}}{\overline{OA'}}$. En utilisant le résultat de la question 1, on montre que : $-\alpha\overline{OA} = \beta\overline{OA'}$. En utilisant l'expression de β obtenue à la question précédente, il vient que :

$$-\alpha\overline{OA} = -\frac{\alpha}{n}\left[\frac{(n-1)\overline{OA}}{R} + 1\right]\overline{OA'} \iff n\overline{OA} = \frac{n-1}{R}\overline{OA}\cdot\overline{OA'} + \overline{OA'}$$

En divisant cette équation par $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}$, on arrive au résultat attendu.

5. Pour que l'image d'un objet à l'infini sur l'axe optique se forme au point B, il faut que $\overline{OA'} = 2R$. D'après la relation de conjugaison établie à la question précédente, cela revient à dire que n vérifie :

$$\frac{n}{2R} = \frac{n-1}{R} \iff \boxed{n = 2}$$

★★ Exercice 4 : Taille d'un miroir plan

★★★ Exercice 5 : Sténopé

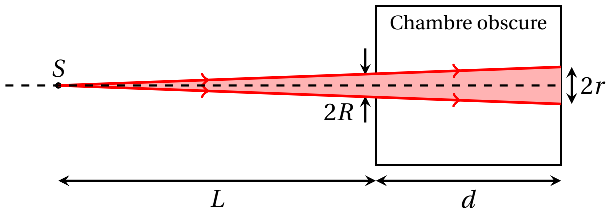
La résolution angulaire de l'appareil à sténopé est limité de deux manières :

- par l'élargissement du faisceau lumineux au cours de sa propagation en ligne droite vers la surface photosensible (cet effet est d'autant plus sensible que le trou est large),
- par la diffraction à travers le trou (cet effet est d'autant plus sensible que le trou est fin).

La taille idéale correspond à un compromis entre la minimisation de ces deux phénomènes. Pour rendre l'étude quantitative, on va déterminer la largeur de la tâche image, dans le cas où l'on tient compte uniquement du premier phénomène, puis uniquement du deuxième.

Effet de la propagation en ligne droite :

On représente graphiquement la situation :



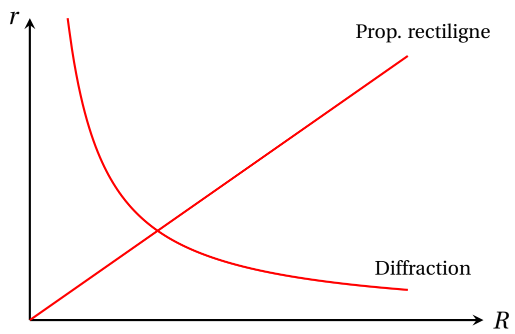
En utilisant le théorème de Thalès, on montre que le rayon de la tâche image vérifie

$$\frac{r}{R} = \frac{L+d}{L} \iff \boldsymbol{r = \left(1 + \frac{d}{L}\right) R}$$

Effet de la diffraction :

La tâche centrale de diffraction à travers un trou de rayon R a pour rayon: $\boldsymbol{r = 1{,}22\,\frac{\lambda d}{R}}$

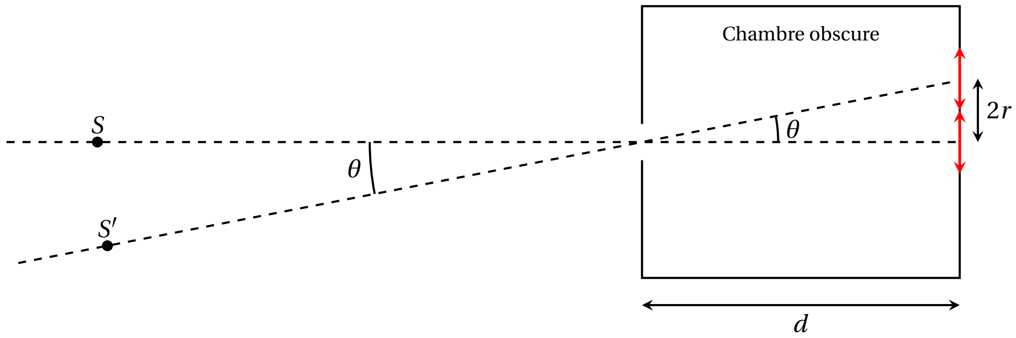
On trace ci-dessous l'allure de $r\,(R)$ pour chacune des deux contributions.



Le choix optimal correspond au cas où les contributions sont égales, c'est-à-dire :

$$\left(1 + \frac{d}{L}\right) R = 1{,}22\,\frac{\lambda d}{R} \iff \boxed{R = \sqrt{\frac{1{,}22\lambda d}{1 + \frac{d}{L}}} = 0{,}36\,\mathrm{mm}}$$

La résolution angulaire de l'appareil est le plus petit écart angulaire entre deux objets qui permet d'obtenir des tâches qui ne se recouvrent pas sur la surface photosensible. On représente ci-dessous le cas limite de deux sources S et S' dont les tâches images (représentées par des doubles flèches) sont tangentes. Par définition, la résolution angulaire de l'appareil est égale à l'angle θ qui sépare les directions des deux sources.



Les centres des deux tâches images sont distantes de $2r$, ce qui permet d'écrire, dans les conditions de Gauss :

$$\boxed{\tan\theta \simeq \theta = \frac{2r}{d} = 2{,}44\,\frac{\lambda}{R}}$$

On effectue l'application numérique :

$$\boxed{\theta = 3{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad} = 13'}$$

Cet appareil possède une résolution angulaire correcte (environ dix fois celle de l'œil humain), compte tenu du fait qu'il fonctionne sans lentille! En contrepartie, la faible taille du trou oblige à utiliser des temps de pose très longs. Cet appareil ne permet donc d'enregistrer que des images d'objets statiques. En l'absence de lentille, il ne peut pas non plus effectuer de mise au point. Il est fait pour prendre des photos d'objets éloignés.