

Devoir n°4 (non surveillé)

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan(x) \tan(2x) = 1$.

EXERCICE 2

On considère le nombre complexe $z = 2\sqrt{3} - 2 + i(2\sqrt{3} + 2)$.

- 1) Calculer z^2 sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
- 2) En déduire la forme exponentielle de z .
- 3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

EXERCICE 3

Pour tout complexe z on pose

$$f(z) = z^3 - z + 2.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs minimale et maximale de $|f(z)|$ lorsque $|z| = 1$.

- 1) On pose $z = e^{it}$ où t est un réel. Montrer que

$$f(z)\overline{f(z)} = 4 \cos 3t - 2 \cos 2t - 4 \cos t + 6.$$

Pour les questions suivantes on pourra utiliser sans les démontrer les formules :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos 3t &= 4 \cos^3 t - 3 \cos t \\ \sin 3t &= -4 \sin^3 t + 3 \sin t \end{cases}.$$

- 2) On considère la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par

$$g(t) = 4 \cos 3t - 2 \cos 2t - 4 \cos t + 6$$

pour tout $t \in [0, \pi]$.

- a) Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi]$,

$$g'(t) = -48 \sin t \left(\cos t + \frac{1}{2} \right) \left(\cos t - \frac{2}{3} \right).$$

On évitera de partir du résultat.

- b) En déduire le tableau de variation de g . On notera α l'unique réel appartenant à $[0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ et on précisera la valeur de $g(\alpha)$.

- 3) Conclure.