

Fiche d'exercices : Nombres complexes

Exercice 1 Écrire sous forme algébrique :

$$(2-5i)^2 ; \frac{1}{3+2i} ; \frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i} ; \frac{(3-2i)(4+i)}{2i(1-4i)} ; (2+i)^3 ; 2e^{i\frac{\pi}{6}} ; \left(\frac{1+i}{-1+i}\right)^{2021}.$$

Exercice 2 Écrire sous forme trigonométrique :

$$1+i\sqrt{3} ; \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1+i\sqrt{3})} ; -1 ; i ; -2e^{i\frac{\pi}{6}} ; (1+i)^{2021}.$$

Exercice 3 Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $(1+i\sqrt{3})^n$ est un réel positif.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z - i\bar{z} = 6 - 6i$.

Exercice 5 Soient $a, b \in \mathbb{U}$ tels que $ab \neq -1$. Montrer que $\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R} \text{ ou } |z| = 1)$.

Exercice 7 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = \frac{1}{|z|} = |z-1|$.

Exercice 8 Soit $z = x + iy$ un complexe (avec x, y réels). Soit $Z = \frac{z-2+i}{iz+1}$.

- 1) Exprimer les parties réelle et imaginaire de Z en fonction de x et y .
- 2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est un imaginaire pur.
- 3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est un nombre réel.

Exercice 9 Soit θ un réel. Exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{10}$ et $\sin \frac{\pi}{10}$.

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

Exercice 11 Calculer $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$.

Exercice 12 Soient θ un réel et n un entier naturel. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) ; \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta) ; \sum_{k=0}^n \frac{\cos(k\theta)}{\cos^k \theta} ; \sum_{k=0}^n 3^k \sin^3 \frac{\theta}{3^{k+1}}.$$

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^3 = 1 - i ; z^3 = \bar{z} ; z^2 + 3z + 5 = 0 ; z^3 - z - 6 = 0 ; z^4 + 2z^2 - 4 = 0.$$

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (2i-11)z^2 + (25-19i)z - 8(1-3i) = 0$, sachant qu'elle admet une solution réelle.

Exercice 15 Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} z_1 + z_2 = 5 \\ z_1 z_2 = 7 + i \end{cases}$.

Exercice 16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

Exercice 17 Calculer la somme et le produit des racines n^e de l'unité.

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$.

Exercice 19 Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}$. On pourra développer $(1+1)^{3n}$, $(1+j)^{3n}$ et $(1+j^2)^{3n}$.

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ puis $\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$.

Exercice 21 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |1+z|$.

Exercice 22 Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Montrer que $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$ sont les solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$.

Exercice 23 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1 = 0$, où θ est un réel et n un entier naturel non nul.

Exercice 24 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 2$ et représenter les solutions dans le plan complexe. Même question avec l'équation $e^z = 1+i$.

Exercice 25 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^{2z} - 6e^z + 12 = 0$.

Dans les exercices suivants, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 26 On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1, i$ et $1-i\sqrt{2}$. Calculer les longueurs AB, AC et BC et déterminer une mesure des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Exercice 27 On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = i, b = 2-i$ et $c = 1 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}$. Calculer $\frac{c-a}{b-a}$ et en déduire la nature du triangle ABC .

Exercice 28 On considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i . Déterminer les affixes des points C tels que le triangle ABC soit équilatéral.

Exercice 29

- 1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 3 + 2i| = 2$.
- 2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2 - i| = |z + 1 + 3i|$.
- 3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|(1 + i)z - 2i| = 2$.

Exercice 30 Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que :

- 1) les points d'affixes respectives z , z^2 et z^4 sont alignés.
- 2) les points d'affixes respectives i , z et iz sont alignés.
- 3) les points d'affixes respectives 1, z et z^2 forment un triangle rectangle.

Exercice 31 Pour tout $z \in \mathbb{C}$ distinct de $-2 - i$, on pose $Z = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}$.

- 1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.
- 2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est un réel positif.
- 3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est un imaginaire pur.
- 4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z| = 2$.

Exercice 32 Soient A , B et C trois points d'affixes respectives a , b et c .

- 1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.
- 2) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Exercice 33 Soit ABC un triangle quelconque. Extérieurement au triangle ABC on construit les triangles ABB' et ACC' , tous deux rectangles et isocèles en A . Soit M le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AM$.

Exercice 34 Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$. Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur. Interpréter ce résultat dans le plan complexe.

Exercice 35 Soient a et z deux complexes avec $z \neq -a$. Montrer que $|z| = |a|$ si et seulement si $\frac{z - a}{z + a}$ est un imaginaire pur. Interpréter ce résultat dans le plan complexe.

Exercice 36 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$. 2) $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \overline{a + ib} = a - ib$. 3) $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{e^{iz}} = e^{-iz}$. 4) $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 - z_2 \leq z_1 + z_2$. 5) Tout nombre complexe a deux racines carrées distinctes. | <ol style="list-style-type: none"> 6) j est une racine 9^e de l'unité. 7) Si n divise p, alors $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_p$. 8) $\forall z \in \mathbb{U}, \exists n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{U}_n$. 9) $\{z \in \mathbb{C}, z^n = -1\} = \{-z, z \in \mathbb{U}_n\}$. 10) Si $z = 5$ et que $z - 1 = z - 2$ alors $z - 3 = 5$. |
|--|---|