TD3 : Lentilles minces - corrigé

Exercice 1 : Problèmes de lentilles

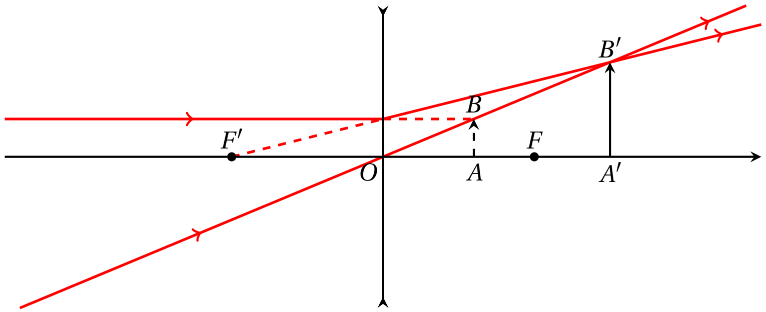
1. L'objet est réel donc $\overline{OA} = -37{,}5\,\text{cm}$. On utilise la relation de conjugaison de Descartes pour déterminer la position de l'image :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \iff \boxed{\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}\cdot f'}{\overline{OA}+f'} = 90{,}3\,\text{cm}}$$

2. L'objet est réel donc $\overline{OA} = -2{,}2\,\text{m}$. On utilise une relation de grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{f'}{\overline{FA}} = \frac{f'}{\overline{FO}+\overline{OA}} = \frac{f'}{\overline{OA}+f'} \iff \boxed{\left|\overline{A'B'}\right| = \left|\frac{f'}{\overline{OA}+f'}\cdot\overline{AB}\right| = 1{,}29\,\text{m}}$$

3. On construit ci-dessous l'image de AB :



L'objet est virtuel donc $\overline{OA} = 3\,\text{cm}$. On détermine la position de l'image à l'aide de la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \iff \boxed{\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}\cdot f'}{\overline{OA}+f'} = 7{,}5\,\text{cm}}$$

Le grandissement vaut : $\boxed{\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 2{,}5}$. L'image est **réelle, droite et agrandie**. Les valeurs obtenues sont cohérentes avec la construction.

4. Si l'image est droite et trois fois plus grande alors $\gamma = 3$. Pour déterminer la position de l'objet, on utilise une relation de grandissement :

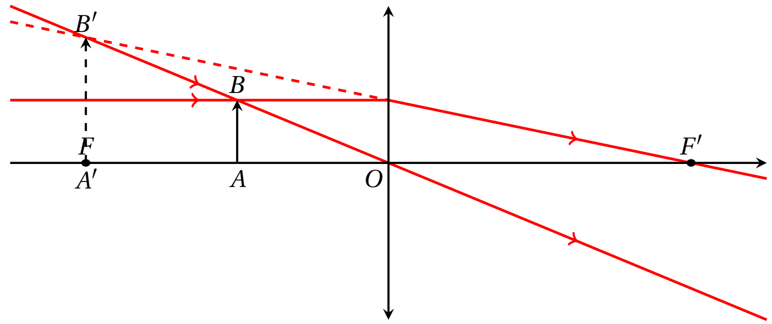
$$\gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} = \frac{f'}{\overline{OA}+f'} \iff \boxed{\overline{OA} = f'\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) = -1\,\text{cm}}$$

D'après la relation de conjugaison de Descartes : $\boxed{\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}\cdot f'}{\overline{OA}+f'} = -3\,\text{cm}}$.

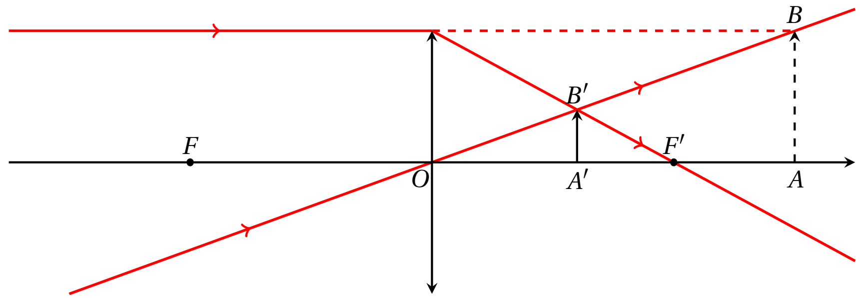
L'objet est **réel** et l'image est **virtuelle**.

Exercice 2 : Constructions géométriques

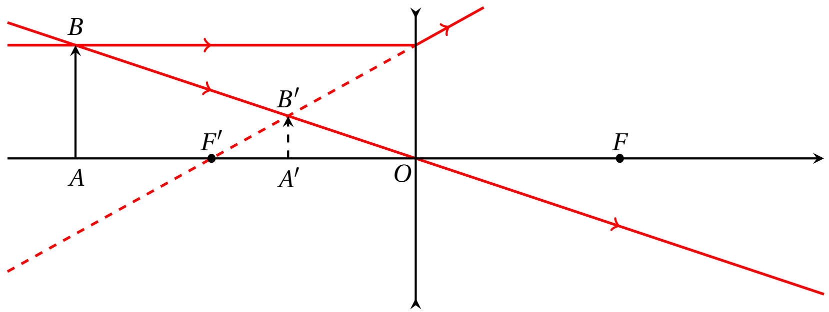
1.



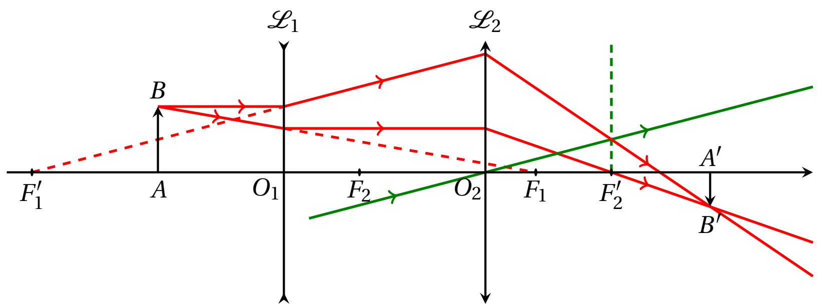
2.



3.



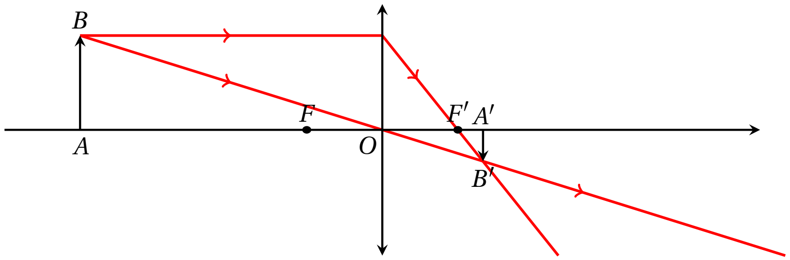
4.



⋆ Exercice 3 : Modélisation de l'appareil photo

1. Si l'appreil photo fait la mise au point à l'infini, alors l'image se forme **dans le plan focal image de la lentille**. La pellicule se trouve à une distance de **5 cm** de l'objectif.

2. Si l'on fait une mise au point sur un sujet à distance finie, alors l'image est translatée dans le sens de l'axe optique, derrière le plan focal image, comme le montre la figure ci-dessous.



On détermine le déplacement $\overline{F'A'}$ de la pellicule (appelé tirage de l'objectif) en utilisant la relation de conjugaison de Newton :

$$-f'^2 = \overline{FA}\cdot\overline{F'A'} = \left(\overline{FO}+\overline{OA}\right)\cdot\overline{F'A'} \iff \boxed{\boldsymbol{\overline{F'A'} = -\frac{f'^2}{\overline{OA}+f'} = 0{,}5\,\text{mm}}}$$

3. On détermine la position limite du sujet dans le cas où le tirage de l'objectif est maximal, égal à 5mm. On utilise à nouveau la relation de Newton :

$$-f'^2 = \left(\overline{OA}+f'\right)\cdot\overline{F'A'} \iff \boxed{\boldsymbol{\overline{OA} = -\frac{f'^2}{\overline{F'A'}} - f' = -55\,\text{cm}}}$$

⋆ Exercice 4 : Correction de myopie

On rappelle que l'œil accomode par modification de la vergence du cristallin. Au repos (l'œil fait le point sur le PR), la vergence est minimale donc la distance focale est maximale (on la note f'_{repos}). Au maximum d'accomodation (l'œil fait le point sur le PP), la vergence est maximale donc la distance focale est minimale (on la note f'_{accom}).
Connaissant les positions du PR et du PP de l'œil myope, on peut déterminer les valeurs de f'_{accom} et f'_{repos} en utilisant la relation de conjugaison de Descartes. Par la suite, on note O le centre optique du cristallin et A' le point de la rétine qui se trouve sur l'axe optique. D'après l'énoncé, la distance $\overline{OA'}$ est fixe et vaut 15,2 mm.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OPR}} = \dfrac{1}{f'_{\text{repos}}} \\[2ex] \dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OPP}} = \dfrac{1}{f'_{\text{accom}}} \end{cases} \iff \begin{cases} \boldsymbol{f'_{\text{repos}} = \dfrac{\overline{OPR}\cdot\overline{OA'}}{\overline{OPR}-\overline{OA'}} = 1{,}50\,\text{cm}} \\[2ex] \boldsymbol{f'_{\text{accom}} = \dfrac{\overline{OPP}\cdot\overline{OA'}}{\overline{OPP}-\overline{OA'}} = 1{,}35\,\text{cm}} \end{cases}$$

Par conséquent, **la distance focale de cet œil varie entre 1,35 cm et 1,50 cm.**

Pour corriger la vision de cet œil, il faut rajouter une lentille de sorte que le PR soit renvoyé à l'infini (l'œil corrigé pourra voir net à l'infini sans accomodation). On modélise la correction par l'ajout d'une lentille **accolée au cristallin**. Si l'on note V la vergence de la lentille correctrice, alors la vergence de l'œil corrigé **au repos** vaut $V + V_{\text{repos}}$. D'après la relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = V + V_{\text{repos}} \iff \boxed{\boldsymbol{V = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{f'_{\text{repos}}} = -0{,}88\,\delta}}$$

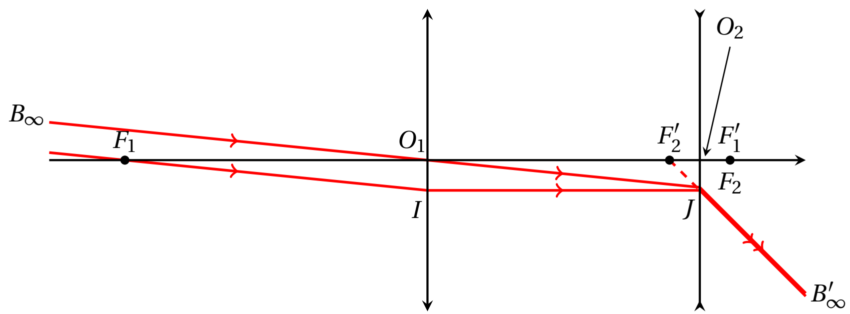
Pour déterminer la nouvelle position du PP, on utilise encore la relation de Descartes, avec l'œil corrigé à son maximum d'accomodation (sa vergence vaut alors $V + V_{\text{accom}}$) :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OPP}} = V + V_{\text{accom}} \iff \boxed{\boldsymbol{\overline{OPP} = \left(\frac{1}{\overline{OA'}} - V - \frac{1}{f'_{\text{accom}}}\right)^{-1} = -13{,}5\,\text{cm}}}$$

⋆ Exercice 5 : Lunette de Galilée

1. La lunette est afocale si le foyer principal image de l'objectif est cofondu avec le foyer principal objet de l'oculaire, c'est-à-dire si : $\boxed{\boldsymbol{\overline{O_1O_2} = f'_1 + f'_2 = 18\,\text{cm}}}$.

2.



L'image formée par la lunette de Galilée est **droite**.

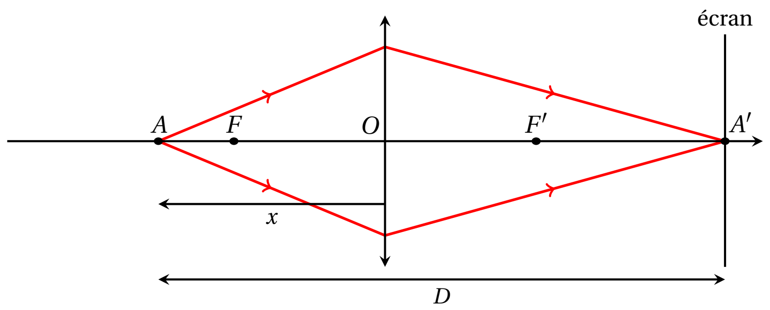
3. Dans le triangle F_1IO_1, $\widehat{IF_1O_1} = \alpha$.
Dans le triangle F'_2JO_2, $\widehat{JF'_2O_2} = \alpha'$.
On peut donc écrire $\tan\alpha \simeq \alpha = \dfrac{\overline{O_1I}}{\overline{O_1F_1}} = -\dfrac{\overline{O_1I}}{f'_1}$ et $\tan\alpha' \simeq \alpha' = \dfrac{\overline{O_2J}}{\overline{O_2F'_2}} = \dfrac{\overline{O_2J}}{f'_2}$.
Par construction, $\overline{O_1I} = \overline{O_2J}$, ce qui revient à dire que :

$$-\alpha f'_1 = \alpha' f'_2 \iff \boxed{\boldsymbol{\alpha' = -\frac{f'_1}{f'_2}\alpha = 10'}}$$

Le grossissement vaut $\boxed{\boldsymbol{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = 10}}$.

⋆⋆ Exercice 6 : Méthode de Bessel

1. On considère un point A conjugué par la lentille avec un point A' qui se trouve sur l'écran. On représente schématiquement la situation ci-dessous.



On écrit la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{avec} \quad \overline{OA} = x \quad \text{et} \quad \overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = x + D$$

On réécrit l'équation ci-dessus :

$$\frac{1}{x+D} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \iff \boxed{\boldsymbol{x^2 + Dx + Df' = 0}}$$

2.a) Si le discriminant du trinôme est strictement négatif alors l'équation vérifiée par x n'a aucune solution. Dans ce cas, il est impossible de former l'image du point A sur l'écran, quelle que soit la position de la lentille.

$$\Delta = D^2 - 4Df' < 0 \iff \boxed{\boldsymbol{D < 4f'}}$$

2.b) Si le discriminant du trinôme est nul $(D = 4f')$ alors l'équation vérifiée par x possède une solution double. Dans ce cas, il existe une unique position de la lentille qui permet de former l'image de A sur l'écran. Cette position est telle que : $x = -\frac{D}{2} = -2f'$. Cela correspond au cas où **la lentille est à égale distance de A et de l'écran**.

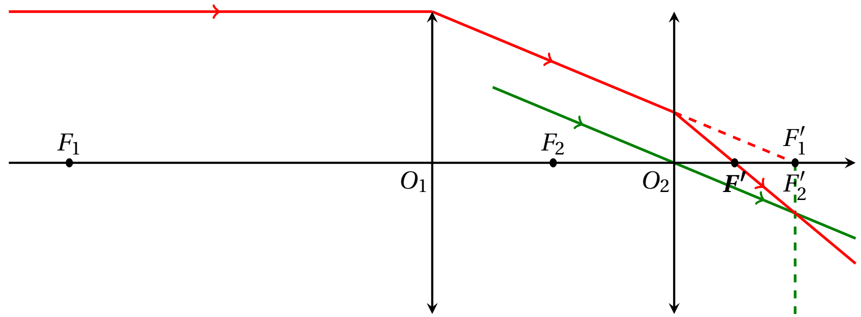
2.c) Si le discriminant du trinôme est strictement positif $(D > 4f')$ alors l'équation vérifiée par x possède deux solutions. Dans ce cas, il existe deux positions différentes de la lentille qui permet de former l'image de A sur l'écran. Ces positions sont telles que :

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(-D - \sqrt{D^2 - 4Df'}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(-D + \sqrt{D^2 - 4Df'}\right)$$

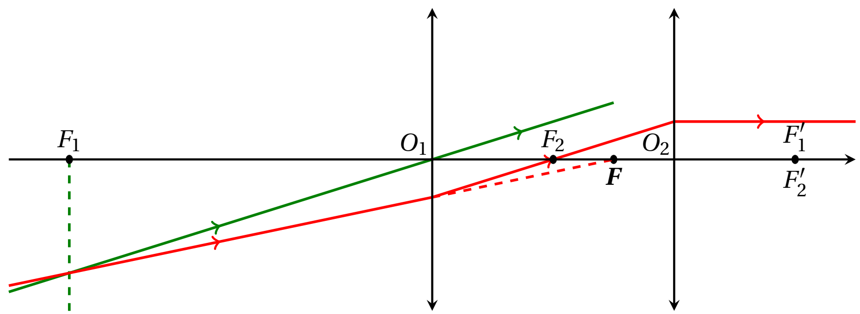
La distance qui sépare ces deux positions vaut $d = x_2 - x_1 = \sqrt{D^2 - 4Df'}$. En isolant f' dans cette relation, on aboutit au résultat attendu : $\boxed{\boldsymbol{f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}}}$.

⋆⋆ Exercice 7 : Doublet optique de Huygens

1. Par définition, le foyer principal image d'un système optique est le conjugué par ce système d'un point objet à l'infini sur l'axe optique. On représente ci-dessous la construction de F'.



Le foyer principal objet d'un système optique est le conjugué par ce système d'un point image à l'infini sur l'axe optique. On représente ci-dessous la construction de F.



2. Par définition : $A_\infty \underset{\{(\mathscr{L}_1)+(\mathscr{L}_2)\}}{\longleftrightarrow} F'$, donc $A_\infty \underset{(\mathscr{L}_1)}{\longleftrightarrow} F'_1 \underset{(\mathscr{L}_2)}{\longleftrightarrow} F'$. F' est le conjugué de F'_1 par $(\mathscr{L}_2)$. Pour déterminer sa position, on utilise la relation de conjugaison de Newton :

$$\overline{F_2F'_1} \cdot \overline{F'_2F'} = -(f'_2)^2 \quad \text{avec} \quad \overline{F_2F'_1} = \overline{F_2O_2} + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = f'_1 + f'_2 - e = 2a$$

On en déduit que $\boxed{\boldsymbol{\overline{F'_2F'} = -\frac{(f'_2)^2}{\overline{F_2F'_1}} = -\frac{a}{2}}}$.

Par définition : $F \underset{\{(\mathscr{L}_1)+(\mathscr{L}_2)\}}{\longleftrightarrow} A'_\infty$, donc $F \underset{(\mathscr{L}_1)}{\longleftrightarrow} F_2 \underset{(\mathscr{L}_2)}{\longleftrightarrow} A'_\infty$. F est le conjugué de F_2 par $(\mathscr{L}_1)$. Pour déterminer sa position, on utilise à nouveau la relation de conjugaison de Newton :

$$\overline{F_1F} \cdot \overline{F'_1F_2} = -(f'_1)^2 \quad \text{avec} \quad \overline{F'_1F_2} = \overline{F'_1O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = e - f'_1 - f'_2 = -2a$$

On en déduit que $\boxed{\boldsymbol{\overline{F_1F} = -\frac{(f'_1)^2}{\overline{F'_1F_2}} = \frac{9a}{2}}}$.

Les résultats obtenus sont cohérents avec les constructions réalisées à la question précédente.

⋆⋆ Exercice 8 : Microscope

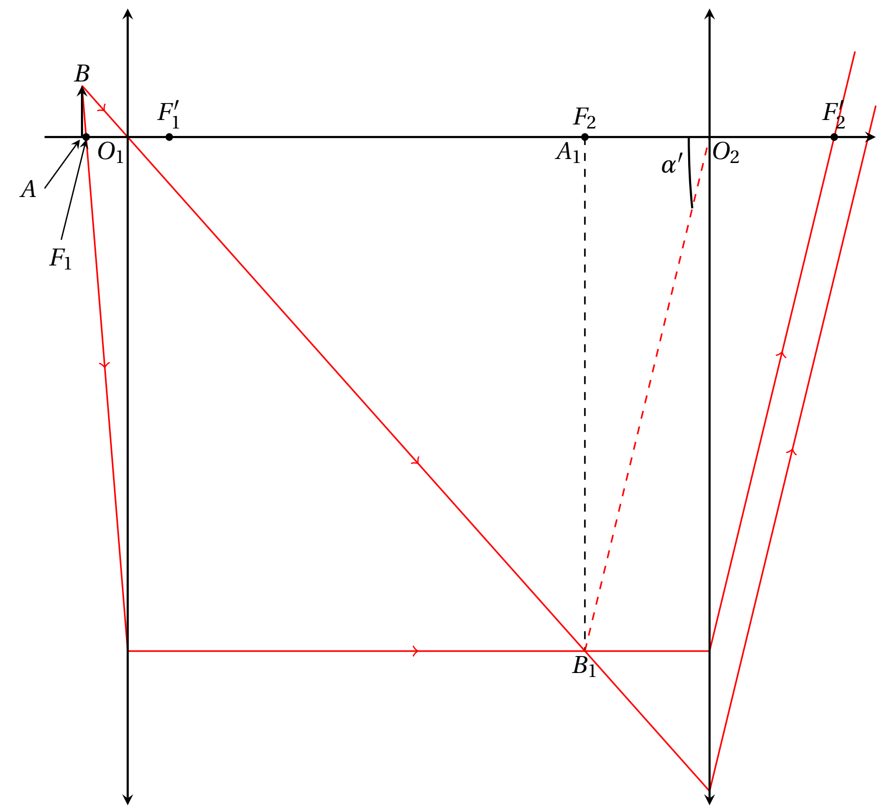
1. La taille angulaire d'un objet de taille h vu à l'œil nu à la distance d_m vaut $\boxed{\boldsymbol{\alpha = \frac{h}{d_m} = 4{,}0 \cdot 10^{-5}\,\text{rad} = 0{,}14'}}$. Cet valeur est inférieure au pouvoir de résolution de l'œil, ce qui signifie que ce dernier n'est pas capable de distinguer les points A et B.

2. Le microscope doit renvoyer une image à l'infini de manière à ce qu'**un obervateur emmetrope puisse voir l'image nette sans avoir besoin d'accomoder**. Pour que cela soit possible, il faut que l'image intermédiaire se forme **dans le plan focal objet de l'oculaire**.
D'après ce que l'on vient de dire, le point A_1 doit être confondu avec F_2, ce qui signifie que $A \underset{(\mathscr{L}_1)}{\longleftrightarrow} F_2$.
On détermine la valeur de l'intervalle optique en utilisant la relation de conjugaison de Newton :

$$\overline{F_1A} \cdot \overline{F_1'F_2} = -\left(f_1'\right)^2 \quad \text{avec} \quad \overline{F_1'F_2} = \Delta \quad \text{et} \quad \overline{F_1A} = \overline{F_1O_1} + \overline{O_1A} = f_1' - \overline{AO_1}$$

On en déduit que $\boxed{\boldsymbol{\Delta = -\frac{(f_1')^2}{f_1' - \overline{AO_1}} = 10\,\text{cm}}}$.

3. Compte tenu des valeurs numériques, on ne représente pas l'objet AB à l'échelle.



4. Dans le triangle $O_2F_2B_1$, on peut écrire $\tan\alpha' \simeq \alpha' = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_2F_2}} = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f_2'}$.
Pour déterminer $\overline{A_1B_1}$, on utilise une relation de grandissement pour la lentille $(\mathscr{L}_1)$:

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F_1'F_2}}{f_1'} = -\frac{\Delta}{f_1'} \iff \overline{A_1B_1} = -\frac{\Delta}{f_1'}h$$

On exprime finalement α' sous la forme suivante : $\boxed{\boldsymbol{\alpha' = \frac{\Delta h}{f_1'f_2'} = 3{,}3 \cdot 10^{-3}\,\text{rad} = 11'}}$.

La taille angulaire de l'image est supérieure au pouvoir de résolution de l'œil. **Le microscope permet à l'observateur de distinguer les points A et B.**

5. Le grossissement commercial du microscope vaut $\boxed{\boldsymbol{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = 83}}$.

⋆⋆ Exercice 9 : Étude d'une lunette astronomique

On a montré en cours que la distance qui sépare les deux lentilles vaut $d = f_1' + f_2'$ (1).
On utilise l'image de la lune pour déterminer numériquement le grossissement de la lunette. Le diamètre angulaire de l'image de la lune formée par la lunette vaut $\alpha' = \frac{D}{f'}$.
Le diamètre angulaire de la lune vaut $\alpha = \frac{2R_L}{L}$.
Par conséquent, on peut déterminer le grossissement de la lunette de la manière suivante :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{DL}{2R_Lf'} = 20$$

On a également montré en cours que $G = \frac{f_1'}{f_2'}$ (2). À partir du système d'équations (1) et (2), on montre que :

$$\boxed{\boldsymbol{f_1' = \frac{G}{G+1}d = 80\,\text{cm}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\boldsymbol{f_2' = \frac{d}{G+1} = 4\,\text{cm}}}$$

⋆⋆ Exercice 10 : Détermination d'une distance focale

Dans les deux situations, les positions de l'objet et de l'écran sont identiques (seule la lentille est déplacée). On notera par la suite respectivement A et A' les points d'intersection de l'objet et de l'écran avec l'axe optique. Ces points sont conjugués l'un de l'autre par la lentille, dans chacune des deux situations.
Dans la première situation (on notera les grandeurs correspondantes avec l'indice 1), le grandissement vaut $\gamma_1 = -2$. Le centre optique de la lentille est dans la position O_1.
Dans la première situation (on notera les grandeurs correspondantes avec l'indice 2), le grandissement vaut $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$. Le centre optique de la lentille est dans la position O_2.
D'après l'énoncé, $\overline{O_1O_2} = d = 0{,}36\,\text{m}$. On écrit une relation de grandissement dans chacune des deux situations :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{f'}{\overline{F_1A}} \iff \overline{F_1A} = -\frac{f'}{2} \\ \gamma_2 = \frac{f'}{\overline{F_2A}} \iff \overline{F_2A} = -2f' \end{cases} \quad \text{avec} \quad \overline{F_2A} = \overline{F_2F_1} + \overline{F_1A}$$

Par construction, $\overline{F_2F_1} = -\overline{O_1O_2} = -d$. On en déduit que :

$$-2f' = -d - \frac{f'}{2} \iff \boxed{\boldsymbol{f' = \frac{2d}{3} = 24\,\mathrm{cm}}}$$

D'après la relation de Newton : $\overline{F_1A} \cdot \overline{F_1'A'} = -\left(f'\right)^2 \iff \overline{F_1'A'} = -\frac{(f')^2}{\overline{F_1A}} = 2f'$.

Finalement, la distance objet/écran vaut $\overline{AA'} = \overline{AF_1} + \overline{F_1F_1'} + \overline{F_1'A'} = \frac{f'}{2} + 2f' + 2f' = \frac{9f'}{2}$ d'où $\boxed{\boldsymbol{\overline{AA'} = 108\,\mathrm{cm}}}$.