Corrigé DS1

Exercice 1 : Mesurer l'énergie d'une bombe atomique

1. $[E] = ML^2T^{-2}$ et $[\rho] = ML^{-3}$. L'équation aux dimensions s'écrit $ML^2T^{-2} = T^\alpha \times (ML^{-3})^\beta \times L^\gamma = M^\beta L^{\gamma-3\beta}T^\alpha$. Il s'agit alors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma - 3\beta = 2 \\ \alpha = -2 \end{cases} \implies \alpha = -2\,,\ \beta = 1\,,\ \gamma = 5$$

Finalement, la loi recherchée est la suivante : $\boxed{E = \dfrac{\rho r^5}{t^2}}$.

2. Le mesurage à la régle graduée du diamètre du nuage donne $D = 4{,}75\,\text{cm}$. Les incertitudes sur cette valeur sont dues au graduations de la règle ($u(D_1) = \frac{1\text{grad}}{\sqrt{12}} = 0{,}3\,\text{mm}$ pour une mesure de distance) mais également à l'allure du nuage, qui n'est pas parfaitement sphérique, notamment à la base. En estimant (grosso modo) que l'incertitude due à cette source d'erreur est du même ordre de grandeur que celle venant des graduations ($u(D_2) = 0{,}3\,\text{mm}$), on en déduit l'incertitude sur le diamètre : $u(D) = \sqrt{u(D_1)^2 + u(D_2)^2} = 0{,}4\,\text{mm}$.

Ensuite, il faut ramener cette valeur à la dimension réelle du nuage en utilisant l'échelle fournie. On mesure que $\ell = 100\,\text{m}$ correspondent à une distance sur l'image environ égale à $L = 2{,}22\,\text{cm}$ avec $u(L) = 0{,}3\,\text{mm}$ (ici, seule l'incertitude sur les graduations intervient car le trait est fin et clairement visible). La valeur réelle du diamètre résulte d'un produit en croix :

$$d = \frac{D \times \ell}{L} = 214\,\text{m} \implies r = \frac{d}{2} = 107\,\text{m}$$

Pour déterminer $u(d)$, on propage les incertitudes dans une formule de type loi de puissance :

$$\frac{u(d)}{d} = \sqrt{\left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2} \implies u(d) = 214 \times \sqrt{\left(\frac{0{,}04}{4{,}75}\right)^2 + \left(\frac{0{,}03}{2{,}22}\right)^2} = 3{,}4\,\text{m} \implies u(r) = \frac{u(d)}{2} = 1{,}7\,\text{m}$$

Il faut désormais déterminer numériquement l'énergie libérée par la bombe :

$$E = \frac{\rho r^5}{t^2} = \frac{1{,}20 \times (107)^5}{(15{,}0 \cdot 10^{-3})^2} = 7{,}48 \times 10^{13}\,\text{J} = 1{,}63 \cdot 10^7\,\text{kg TNT}$$

Enfin, l'incertitude sur cette valeur est obtenue de la manière suivante :

$$\frac{u(E)}{E} = \sqrt{25\left(\frac{u(r)}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{u(t)}{t}\right)^2} \implies u(E) = 1{,}63 \cdot 10^7 \times \sqrt{25 \times \left(\frac{1{,}7}{107}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{0{,}1}{15{,}0}\right)^2} = 1{,}3 \cdot 10^6\,\text{kg TNT}$$

Finalement, l'énergie libérée par l'explosion de la bombe atomique peut être évaluée de la manière suivante :

$$\boxed{E = 1{,}63 \cdot 10^7\,\text{kg TNT}\,;\ u(E) = 0{,}13 \cdot 10^7\,\text{kg TNT}}$$

3. En théorie, $E = \frac{\rho r^5}{t^2} \implies r = E^{1/5} \times \rho^{-1/5} \times t^{2/5} \implies \ln r = \frac{2}{5}\ln t + \frac{1}{5}\ln\left(\frac{E}{\rho}\right)$. La relation entre $\ln r$ et $\ln t$ est censée être affine, de coefficient directeur $\frac{2}{5}$. C'est pourquoi le choix de tracer $\ln r$ en fonction de $\ln t$ est pertinent.

4.a) Voir cours.

4.b) $\boxed{a = 0{,}388\,;\ u(a) = 0{,}012}$.

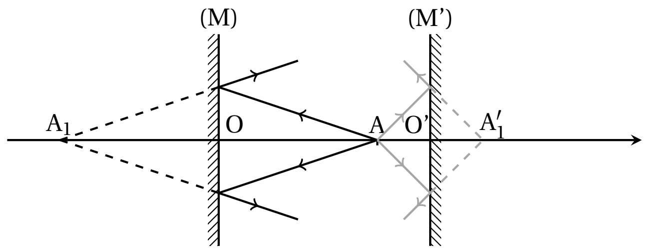
4.c) L'écart normalisé vaut : $\boxed{\text{EN} = \dfrac{|a_{\text{exp}} - a_{\text{théo}}|}{u(a)} = \dfrac{0{,}4 - 0{,}388}{0{,}012} = 1}$.

Il est inférieur à 2. **La valeur expérimentale est compatible avec la valeur théorique prédite par le modèle**. Sur la figure 5, on constate que les point expérimentaux sont très proches du modèle. C'est confirmé par les valeurs des résidus normalisés qui sont tous compris entre -2 et 2. **On peut valider la loi établie à la question 1**.

Exercice 2 : Étude d'un "miroir infini"

1. Un système optique est rigoureusement stigmatique pour deux points A et A' de l'espace si **tout** rayon incident passant par A émerge du système optique en passant **exactement** par A'. On dit alors que A et A' sont ***conjugués*** par le système optique. Le miroir plan est un système optique particulier car il est rigoureusement stigmatique pour tous les points de l'espace, c'est-à-dire que tout point de l'espace possède un conjugué par un miroir plan.

2.



3. D'après la construction ci-dessus, on reconnaît que A_1 et A sont symétriques par rapport à (M) tandis que A'_1 et A sont symétriques par rapport à (M'). On en déduit que $\boxed{\overline{OA_1} = -\ell}$ et $\boxed{\overline{OA'_1} = \overline{OO'} + \overline{O'A'_1} = L + (L - \ell) = 2L - \ell}$.

4. La condition recherchée peut s'exprimer ainsi : la distance algébrique $\overline{A_{n+1}A_n}$ doit être indépendante de n. D'après l'expression des $\overline{OA_n}$ données dans l'énoncé :

$$\overline{A_{n+1}A_n} = \overline{OA_n} - \overline{OA_{n+1}} = \begin{cases} 2\ell & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2(L-\ell) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour que l'effet de miroir infini soit le plus spectaculaire possible, il faut que $L - \ell = \ell \iff \boxed{L = 2\ell}$. **Le point A doit être équidistant des deux miroirs**. La distance entre deux images consécutives vaut alors $\boxed{\overline{A_{n+1}A_n} = L}$.

5. En pratique un miroir ne réfléchit pas l'intégralité de l'énergie lumineuse incidente. Il en absorbe et en diffuse une partie. Ainsi, **la luminosité des images décroit quand *n* augmente**.

Exercice 3 : Spectroscopie à prisme

1. $\boxed{\sin i = n\sin r}$ et $\boxed{\sin i' = n\sin r'}$.

2. Dans le triangle AIJ, $A+\left(\frac{\pi}{2}-r\right)+\left(\frac{\pi}{2}-r'\right)=\pi \implies \boxed{A=r+r'}$.

La déviation du rayon lumineux est la somme des déviations à travers chacun des deux dioptres, qui valent respectivement $D_1 = i-r$ et $D_2 = i'-r'$: $\boxed{D = i+i'-r-r' = i+i'-A}$.

3. Le rayon se réfracte en I dans un milieu plus réfringent (le verre) donc il se rapproche de la normale. La valeur maximale de l'angle de réfraction est atteinte lorsque $i=\pi/2$; il s'agit de **l'angle de réfraction limite** $\boxed{r_{\max} = \arcsin(1/n)}$.

Il pourrait y avoir réflexion totale en J car le rayon se propage vers un milieu moins réfringent. Pour conclure il faut comparer r', angle d'incidence en J, à l'angle de réflexion totale qui vaut ici $I_{\text{tot}} = \arcsin(1/n)$. On a montré à la question 2 que $r' = A-r$. On a également justifié que $r \leq r_{\max} = \arcsin(1/n)$ et enfin on fait l'hypothèse que $A > A_{\text{lim}} = 2\arcsin(1/n)$. On en déduit que :

$$r' > A_{\text{lim}} - r_{\max} = 2\arcsin(1/n) - \arcsin(1/n) = \arcsin(1/n) \iff \boxed{r' > I_{\text{tot}}}$$

Il y a obligatoirement une réflexion totale en J si $A > A_{\text{lim}}$.

4. Le rayon se réfracte en J (et donc émerge du prisme) à condition que :

$$\begin{aligned} r' \leqslant \arcsin(1/n) &\iff r \geqslant A - \arcsin(1/n) \\ &\iff \sin i \geqslant n\sin(A-\arcsin(1/n)) \\ &\iff \boxed{i \geqslant i_{\min} = \arcsin(n\sin(A-\arcsin(1/n)))} \end{aligned}$$

5. $\boxed{A_{\text{lim}} = 84°}$ et $\boxed{i_{\min} = 28°}$.

6. $i' = \arcsin(n\sin r') = \arcsin(n\sin(A-r)) = \arcsin\left(n\sin\left(A-\arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)\right)\right)$. On en déduit que :

$$\boxed{D = i + \arcsin\left(n\sin\left(A-\arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)\right)\right) - A}$$

Cette expression permet de tracer la courbe figurant dans l'énoncé.

7. On trouve naturellement $\boxed{i_{\min} \simeq 28°}$, comme prévu par le calcul précédent. Graphiquement, on mesure $\boxed{D_m \simeq 37°}$ et $\boxed{i_m \simeq 49°}$.

8. On raisonne avec le principe de retour inverse de la lumière. On voit d'après le graphique que le minimum de déviation est unique. D'après le principe de retour inverse, si un rayon entre dans le prisme avec un angle i', il subit la même déviation que s'il entre avec un angle i. Cela signifie qu'à chaque valeur de D correspond en principe deux valeur possibles pour i, sauf si ces deux valeurs se confondent, ce qui est le cas au minimum de déviation, pour lequel $i = i'$.

9. Au minimum de déviation, les relations de I.1. deviennent $\sin r_m = \sin r'_m = \frac{1}{n}\sin i_m$. r_m et r'_m sont égaux et d'après I.2., $\boxed{r_m = \frac{A}{2}}$.

10. D'après le résultat de la question précédente : $\sin i_m = n\sin\left(\frac{A}{2}\right) \implies i_m = \arcsin\left(n\sin\left(\frac{A}{2}\right)\right)$. On obtient alors :

$$D_m = 2i_m - A = 2\arcsin\left(n\sin\left(\frac{A}{2}\right)\right) - A \iff \sin\left(\frac{D_m+A}{2}\right) = n\sin\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\iff \boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{D_m+A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

11. Un milieu pour lequel l'indice de réfraction dépend de la longueur d'onde est appelé **dispersif**. Cette propriété fait que le prisme dévie différemment des radiations de longueurs d'onde différentes. Par conséquent, on observera une **décomposition de la lumière blanche** à la sortie du prisme.

12. Plus le verre est réfringent et plus le rayon est dévié (à l'entrée comme à la sortie du prisme). Par conséquent, D varie dans le même sens que n.

13. λ_1 correspond au violet et λ_2 au rouge. D'après la loi de Cauchy, l'indice de réfraction est le plus élevé pour les faibles longueurs d'onde, c'est-à-dire, en ce qui concerne le visible, pour le violet. **La déviation est la plus importante pour le violet**.

14. Une étude statistique permet d'obtenir $\overline{n} = 1{,}7774$ et $\sigma_n = 0{,}0031$. On trouve alors que :

$$u(\overline{n}) = \frac{\sigma_n}{\sqrt{12}} = 0{,}0012$$

On conclut enfin que :

$$\boxed{\overline{n} = 1{,}7774\,;\, u(\overline{n}) = 0{,}0012}$$