

DS de physique n°1

Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et **les résultats soulignés ou encadrés**. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considéré comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte 3 exercices indépendants.

Exercice 1 : Mesurer l'énergie d'une bombe atomique

Une légende en physique voudrait que l'analyse dimensionnelle ait permis à Geoffrey Ingram Taylor d'estimer, en 1950, l'énergie dégagée par l'explosion d'une bombe nucléaire, cette information étant alors classée secret défense. Taylor suppose a priori que le processus d'expansion de la sphère de gaz dépend au minimum des paramètres suivants :

- le temps t (origine prise au début de l'explosion),
- l'énergie E dégagée par l'explosion ,
- la masse volumique de l'air ρ .

1. On suppose que l'énergie E s'écrit sous la forme $E = t^\alpha \rho^\beta r^\gamma$, où r est le rayon de la sphère de gaz. Déterminer les exposants α , β et γ par analyse dimensionnelle.
2. En mesurant le diamètre du nuage sur la photo (figure 1) réalisée après $t = 15,00$ ms ($u(t) = 0,10$ ms), faire l'application numérique. On prendra pour densité de l'air $\rho = 1,20$ kg \cdot m $^{-3}$ (incertitude-type négligée) et on donnera le résultat, accompagné de son incertitude-type, en unité SI puis en masse équivalente de TNT (1 kg TNT = $4,6 \cdot 10^6$ J).

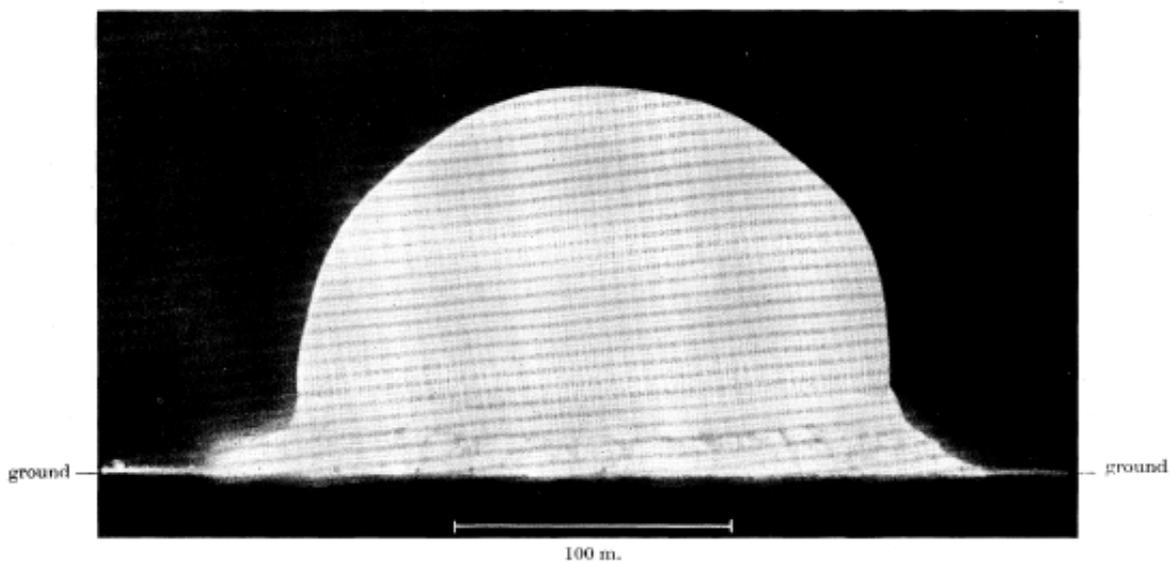


FIGURE 1 : Cliché montrant l'explosion d'une bombe atomique

On souhaite vérifier la relation entre le rayon du nuage et le temps. Une série de clichés montrant l'expansion du nuage dans les premiers instants suivant l'explosion permet d'obtenir le tableau ci-dessous, reliant le rayon du nuage au temps écoulé :

Temps (en ms)	0,4	0,7	0,9	1,2	1,5	1,8	3,3	3,8	4,3	15	34	62
Rayon (en m)	25,4	31,9	36,3	41,0	44,4	46,9	59,0	62,9	65,6	106,5	145,0	185,0

À partir des valeurs obtenues, on trace le graphe $\ln r = f(\ln t)$ et on effectue une régression linéaire, avec le modèle affine $\ln r = a \ln t + b$. Le résultat de la régression est représenté sur la figure 2. Les résidus normalisés sont représentés sur la figure 3.

3. Justifier le choix d'une échelle logarithmique en abscisse et en ordonnée. Quelles est la valeur théorique du coefficient directeur a ?
4. On peut estimer l'incertitude-type sur la valeur de a en utilisant une méthode de Monte Carlo.
 - a) Expliquer en quelques phrases en quoi cela consiste.
 - b) On obtient $u(a) = 0,01228$. Proposer une écriture pour la valeur de a et de son incertitude associée avec un nombre pertinent de chiffres significatifs.
 - c) Calculer l'écart normalisé entre la valeur expérimentale de a et celle prédite par la théorie. Compte tenu de cette valeur et de l'allure des figures 2 et 3, que pouvez-vous conclure ?

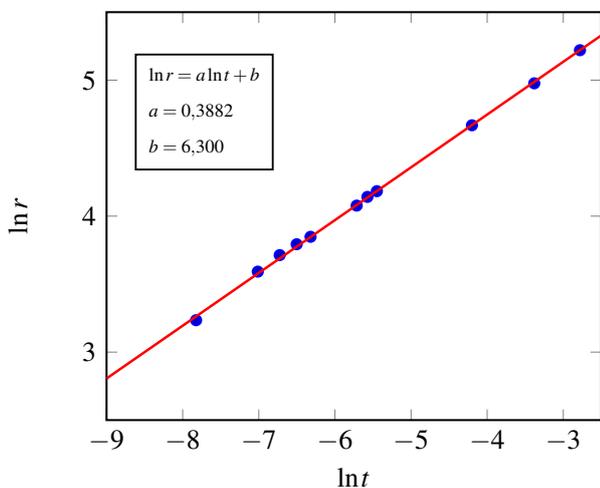


FIGURE 2 : Régression linéaire du graphe $\ln r = f(\ln t)$

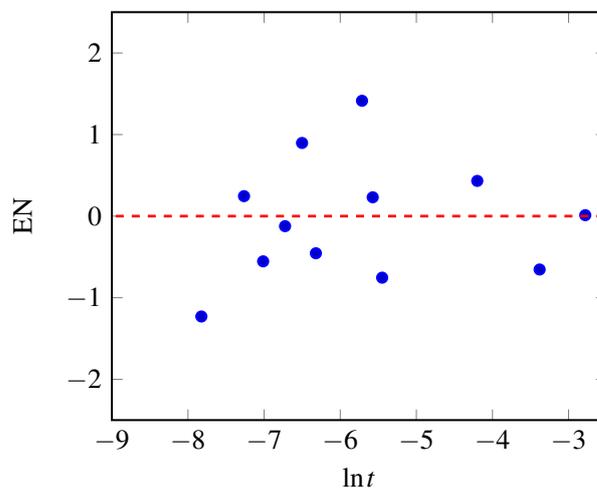


FIGURE 3 : Résidus normalisés

FORMULAIRE

Si $x = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_N y_N$ où (a_1, a_2, \dots, a_N) sont des constantes alors
$$u(x) = \sqrt{(a_1 u(y_1))^2 + \dots + (a_N u(y_N))^2}$$

Si $x = \text{Cste} \times y_1^{a_1} y_2^{a_2} \dots y_N^{a_N}$ où les exposants (a_1, a_2, \dots, a_N) sont constants alors
$$\frac{u(x)}{|x|} = \sqrt{\left(a_1 \frac{u(y_1)}{y_1}\right)^2 + \dots + \left(a_N \frac{u(y_N)}{y_N}\right)^2}$$

Exercice 2 : Étude d'un "miroir infini"

On étudie dans cet exercice les dalles d'une piste de danse telle que l'on peut en trouver dans certaines discothèque. En association des LED situées sur son pourtour, chaque dalle est équipée d'une combinaison astucieuse de miroirs dans le but de maximiser leur effet lumineux. Une profondeur virtuelle variable peut être créée en faisant varier l'intensité lumineuse, permettant ainsi de visualiser jusqu'à une vingtaine d'images de chaque LED, comme représenté sur la figure 9.

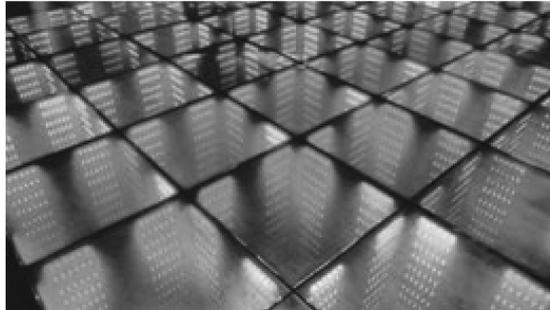


FIGURE 9 – Spectacle lumineux offert par les LED (*Sustainable Dance Club BV*[®]).

Le système optique est modélisé par l'association de deux miroirs plans (voir figure 10) :

- un miroir (M) totalement réfléchissant ;
- un miroir sans tain (M'), réfléchissant une fraction de l'intensité lumineuse et laissant passer le reste, afin que le danseur puisse voir de multiples images de chaque LED.

Les miroirs sont disposés parallèlement ; la distance L qui les sépare est de l'ordre de quelques centimètres. Une LED, assimilée à une source ponctuelle monochromatique, est disposée entre les deux miroirs, à une distance $\overline{OA} = \ell$ du miroir (M).

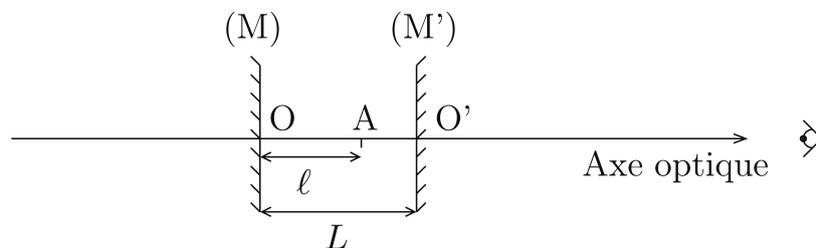


FIGURE 10 – Deux miroirs plans en configuration parallèle : schéma et notations.

1. Le miroir plan est un système optique rigoureusement stigmatique ; expliquer ce que cela signifie.
2. Tracer soigneusement sur le document réponse (à rendre avec la copie) les rayons lumineux (et éventuellement leurs prolongements) vous permettant de placer l'image A_1 de A par le miroir (M), ainsi que l'image A'_1 de A par le miroir (M'). On choisira deux couleurs différentes pour le tracé des rayons, une pour chaque image.
3. Déterminer en fonction de ℓ et L les longueurs algébriques $\overline{OA_1}$ et $\overline{OA'_1}$.

L'image A_1 joue à son tour le rôle d'objet pour le miroir (M'), qui en donne une image notée A'_2 . De même, l'image A'_1 joue le rôle d'objet pour le miroir (M) qui en donne une image A_2 , et ainsi de suite... On admet l'expression généralisée de la position de l'image A_n ($n \in \mathbb{N}^*$) située en amont du miroir (M) sur l'axe optique :

$$\overline{OA_n} = \begin{cases} \ell - nL & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\ell - (n-1)L & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour que l'effet de «miroir infini» soit le plus spectaculaire possible, il faut que les images A_n sous la piste de danse apparaissent équidistantes aux yeux des danseurs, comme le montre la figure 9.

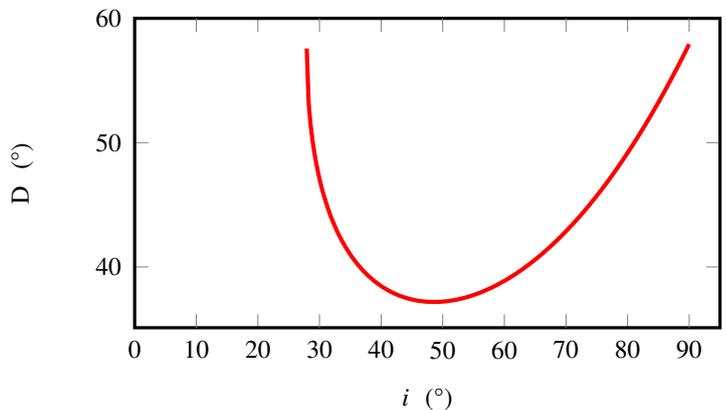
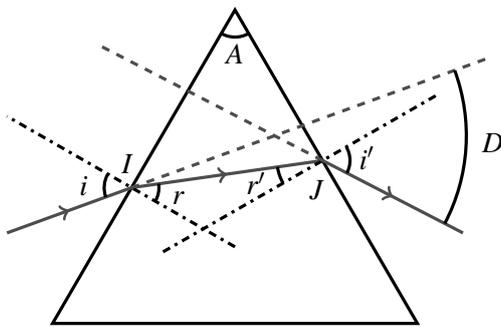
4. Déterminer rigoureusement la relation que doivent vérifier ℓ et L pour que la condition énoncée ci-dessus soit réalisée ; exprimer alors la distance $\overline{A_{n+1}A_n}$ entre deux images successives en fonction de L .
5. En pratique, les images A_n de chaque LED n'apparaissent pas toutes aussi lumineuses ; expliquer qualitativement pourquoi. Comment évolue la luminosité des images quand n augmente ?

Exercice 3 : Spectroscopie à prisme

Partie I : Étude d'un prisme

On considère un prisme réalisé dans un matériau transparent homogène isotrope d'indice de réfraction n (par exemple du verre) et d'angle au sommet A . Ce prisme est plongé dans l'air dont l'indice de réfraction est assimilé à 1,00. Un rayon incident monochromatique arrive en I sur la face d'entrée du prisme avec un angle d'incidence i . On s'intéresse dans la suite au cas où un rayon émerge en J . Les notations des angles sont définies sur la figure ci-dessous.

On rappelle que la fonction $x \mapsto \arcsin x$ est la réciproque de la fonction $x \mapsto \sin x$, c'est-à-dire la fonction telle que $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2], \arcsin(\sin x) = x$.



1. Énoncer les lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction aux points I et J .
2. Établir la relation entre r, r' et A puis exprimer la déviation D introduite par le prisme en fonction de A, i et i' .
3. On peut faire varier librement l'angle i entre 0 et 90° . Montrer que r admet une borne supérieure r_{\max} que l'on exprimera en fonction de n . En déduire qu'il y a nécessairement réflexion totale en J si $A > A_{\lim} = 2 \arcsin(1/n)$.
4. On suppose désormais que $A \leq A_{\lim}$. Montrer qu'un rayon ne peut se réfracter en J que si l'angle i est supérieur à une valeur critique i_{\min} dont on donnera l'expression en fonction de A et de n .
5. Applications numériques : Calculer A_{\lim} et i_{\min} pour $n = 1,50$ et $A = 60,0^\circ$.
6. À partir des relations obtenues aux questions 1 et 2 déterminer l'expression de D en fonction de i, n et A .
7. On représente ci-dessus le graphe de la fonction $D(i)$ pour les valeurs numériques utilisées ici. Déterminer graphiquement la valeur de l'angle i_{\min} minimal nécessaire à l'émergence d'un rayon. Comparer cette valeur avec celle trouvée à la question 5. Déterminer graphiquement les valeurs numériques de D_m et i_m en degrés, valeurs respectives de D et i au minimum de déviation.
8. Énoncer le principe de retour inverse de la lumière. Utilisez-le pour justifier que $i' = i_m$ au minimum de déviation.
9. On note r_m la valeur de r au minimum de déviation. Exprimer r_m en fonction de A .

10. Déduire des questions précédentes que :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Partie II : Spectroscopie

On suppose désormais que le prisme est éclairé en lumière blanche. Le verre qui constitue le prisme a un indice qui suit une loi de Cauchy du type $n = n_0 + \frac{B}{\lambda^2}$ où n_0 et B sont des constantes positives.

Dans la suite, on considère un rayon lumineux qui frappe le prisme sous un angle i fixé.

11. Comment appelle-t-on un milieu dont l'indice de réfraction dépend de la longueur d'onde ? Décrire sommairement ce que l'on observe à la sortie du prisme.
12. Établir par un raisonnement simple dans quel sens varie D lorsque l'indice n du prisme croît. On rappelle que dans cette question, les angles i et A sont fixés.
13. Entre deux radiations de longueurs d'onde $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$, laquelle est la plus déviée ? Justifier. On précisera les couleurs associées à ces radiations.
14. **Application** : en exploitant le résultat de la question 10, plusieurs étudiants d'une classe mesurent séparément la valeur de l'indice de réfraction du prisme pour l'une des radiations d'une lampe à vapeur de mercure. Leurs résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

1,777	1,782	1,775	1,779	1,780	1,773	1,776
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Déterminer la valeur moyenne \bar{n} des valeurs mesurées et son incertitude-type $u(\bar{n})$.

DOCUMENT RÉPONSE

