Corrigé DM1

Exercice 1 : Points de Weierstrass d'un dioptre sphérique

1. Le rayon issu de W se réfracte avec un angle $r = \pi/2$, par conséquent **l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion totale** : $\boxed{i = \arcsin(1/n)}$.

2. Dans le triangle rectangle WHC :

$$\sin i = \frac{\mathrm{CW}}{\mathrm{CH}} \iff \frac{1}{n} = \frac{\mathrm{CW}}{R}$$

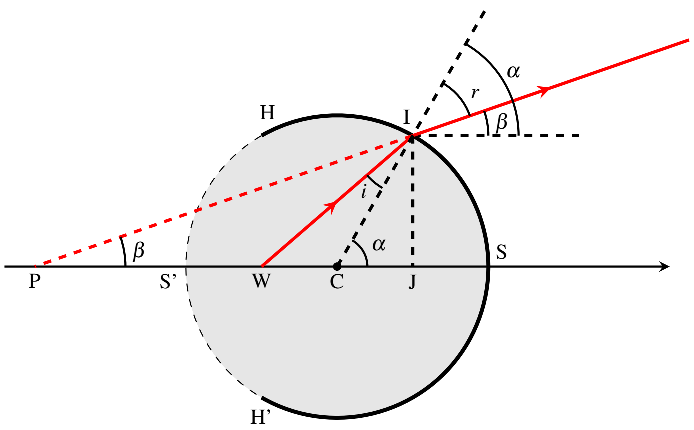
$$\iff \boxed{\mathrm{CW} = \frac{R}{n}}$$

Dans le triangle rectangle W'CH, on montre rapidement que $\widehat{\mathrm{CW'H}} = i$. On a alors :

$$\sin i = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CW'}} \iff \frac{1}{n} = \frac{R}{\mathrm{CW'}}$$

$$\iff \boxed{\mathrm{CW'} = nR}$$

3. On trace deux angles correspondants respectivement à α et β au niveau du sommet I. On constate alors immédiatement que $\boxed{\alpha = r + \beta}$.



4. On utilise ici le fait que IJ est un côté commun aux triangles rectangles PIJ, WIJ et CIJ :

$$\mathrm{IJ} = \mathrm{CI}\sin\alpha = \mathrm{WJ}\tan(\widehat{\mathrm{IWJ}}) = \mathrm{PJ}\tan\beta$$

Par ailleurs on a :

$$\mathrm{CI} = R \quad ; \quad \widehat{\mathrm{IWJ}} = \alpha - i \quad ; \quad \mathrm{WJ} = \mathrm{CW} + \mathrm{CJ} = \mathrm{CW} + R\cos\alpha \quad ; \quad \mathrm{PJ} = \mathrm{CP} + \mathrm{CJ} = \mathrm{CP} + R\cos\alpha$$

Cela permet d'aboutir au résultat attendu :

$$\boxed{R\sin\alpha = \left(\frac{R}{n} + R\cos\alpha\right)\tan(\alpha - i) = (\mathrm{CP} + R\cos\alpha)\tan\beta}$$

5. Il manque la loi de la réfraction appliquée en I : $\boxed{n\sin i = \sin r}$!

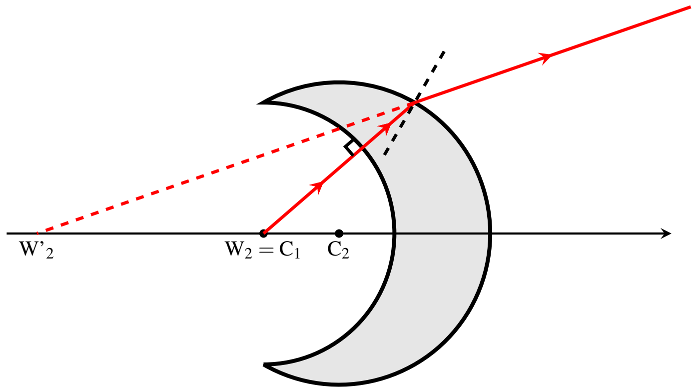
6. On exploite le résultat de la question 4 :

$$R\sin\alpha = (\mathrm{CP} + R\cos\alpha)\frac{\sin\alpha}{n + \cos\alpha} \iff \mathrm{CP} + R\cos\alpha = R(n + \cos\alpha)$$

$$\iff \boxed{\mathrm{CP} = nR}$$

La distance CP obtenue est indépendante de l'angle α ; on arrive à la conclusion que **tout** rayon incident issu de W et qui se réfracte par le dioptre HSH' émerge dans une direction qui coupe l'axe à la distance nR du centre, c'est-à-dire **exactement au point W'**, comme on l'a montré à la question 2.

7. Le rayon qui traverse le dioptre d'entrée arrive **toujours sous incidence normale** (car W_2 est confondu avec le centre de ce dioptre) ; le rayon n'est pas dévié par le dioptre d'entrée et est réfracté par le dioptre de sortie exactement comme on l'a étudié dans cet exercice ; il émerge exactement dans la direction de $\mathrm{W'}_2$. **W_2 et $\mathrm{W'}_2$ sont conjugués par le ménisque d'Amici**.



Exercice 2 : Vibrations d'une goutte d'eau

1. Nous faisons l'hypothèse que la fréquence de vibration de la goutte suit une loi du type :

$$f = \mathrm{Cste} \times R^{\alpha}\rho^{\beta}A^{\gamma}$$

On cherche les exposants dimensionnels des différentes grandeurs : $[f] = \mathrm{T}^{-1}$, $[R] = \mathrm{L}$, $[\rho] = \mathrm{ML}^{-3}$, $[A] = [F]\mathrm{L}^{-1} = \mathrm{MT}^{-2}$. On en déduit que :

$$\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{M}^{\beta+\gamma}\mathrm{L}^{\alpha-3\beta}\mathrm{T}^{-2\gamma}$$

Les exposants dimensionnels doivent vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} \beta+\gamma=0 \\ \alpha-3\beta=0 \\ -2\gamma=-1 \end{cases} \implies \begin{cases} \gamma=\frac{1}{2} \\ \beta=-\frac{1}{2} \\ \alpha=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Il existe une unique solution, qui conduit à la loi suivante : $\boxed{f=\text{Cste}\sqrt{\frac{A}{\rho R^3}}}$.

2. D'après le résultat de la question précédente : $f \propto R^{-3/2}$. Ainsi, on peut écrire en passant au logarithme :

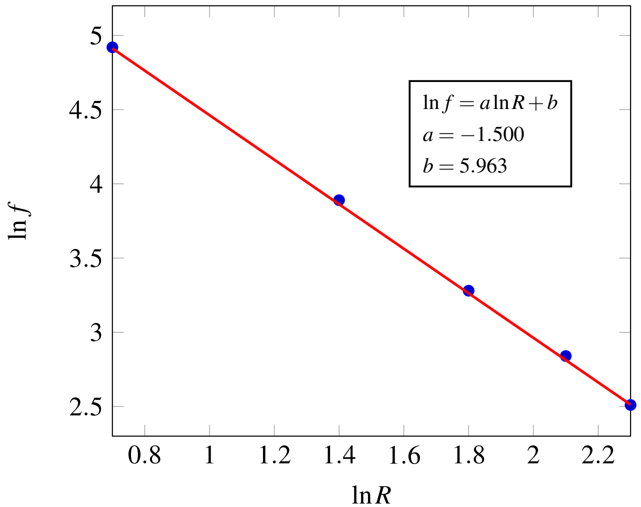
$$\ln f = \text{Cste} + \ln\left(R^{-3/2}\right) = \text{Cste} - \frac{3}{2}\ln R$$

En théorie, on doit observer $\boxed{a=-\frac{3}{2}}$.

3. Nous voulons tester la validité de la loi suivante : $\ln f = -\frac{3}{2}\ln R + \text{Cste}$. Nous allons effectuer la regression linéaire de la courbe $\ln f = g(\ln R)$. On commence par déterminer les valeurs des différents logarithmes :

Rayon (en mm)	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
fréquence (en Hz)	137,2	48,7	26,5	17,1	12,3
$\ln R$	0,70	1,4	1,8	2,1	2,3
$\ln f$	4,92	3,89	3,28	2,84	2,51

Le graphique $\ln f = g(\ln R)$ a l'allure suivante :



Bien que nous n'ayons pas accès aux incertitudes sur ces valeurs, celles-ci semblent très proches du modèle. On peut valider le modèle affine. On constate que la valeur proposée pour le coefficient directeur est compatible avec la prévision de l'analyse dimensionnelle.