

DM de physique n° 1

Exercice 1 : Points de Weierstrass d'un dioptré sphérique

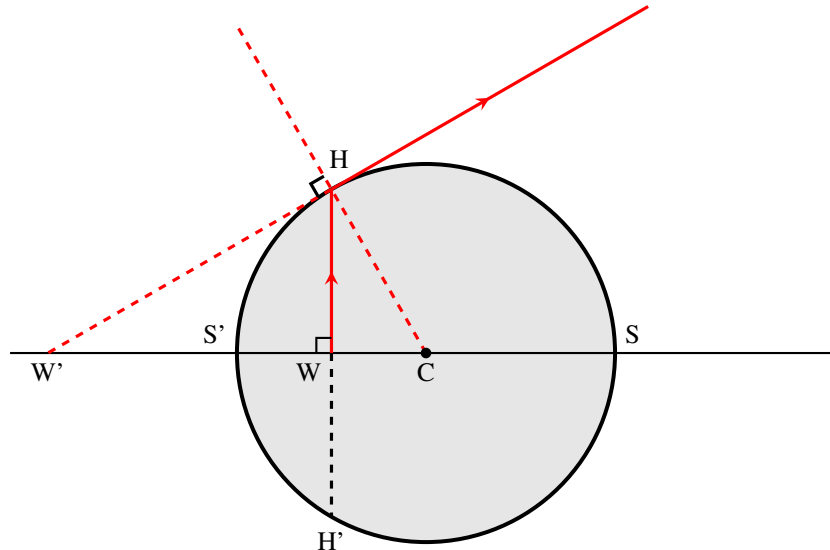


FIGURE 1 : Définition des points de Weierstrass d'un dioptré sphérique

On considère un milieu homogène transparent isotrope d'indice de réfraction n ayant la forme d'une sphère de rayon R et de centre C . Ce milieu est plongé dans l'air d'indice égal à 1.

On choisit arbitrairement une direction de référence modélisée par l'axe orienté représenté sur la figure 1. On définit, pour cette direction de référence et pour le dioptré sphérique qui sépare ces deux milieux un couple de points (W, W') , appelés *points de Weierstrass*, de la manière suivante :

- W est le point de l'axe situé à l'intérieur de la sphère d'indice n et tel qu'un rayon issu de W et orthogonal à l'axe se réfracte tangentiellement au dioptré sphérique. On note H le point d'incidence correspondant et H' son symétrique par rapport à l'axe ;
- W' est le point d'intersection du prolongement du rayon émergent et de l'axe.

On note S et S' les deux points d'intersection entre l'axe et le dioptré.

1. Déterminer l'angle d'incidence en H en fonction de n .
2. Exprimer les distances CW et CW' en fonction de R et n .

Les points de Weierstrass ont une propriété géométrique remarquable : tout rayon issu de W et qui se réfracte sur le dioptré $HS'H'$ émerge **exactement dans la direction de W'** ; on dit que le dioptré $HS'H'$ est **rigoureusement stigmatique** pour le couple de point (W, W') . Nous allons chercher à démontrer cette propriété. Pour cela on se rapporte à la figure 2 située en page suivante ; on s'intéresse **uniquement aux rayons se réfractant à travers le dioptré $HS'H'$** ; on laisse de côté la partie $HS'H'$.

On considère un rayon issu de W et se réfractant en un point I quelconque du dioptré $HS'H'$, paramétré par sa direction angulaire α mesurée par rapport à l'axe orienté. On note P l'intersection du prolongement du rayon émergent et de l'axe.

3. Établir une relation entre α , β et r .

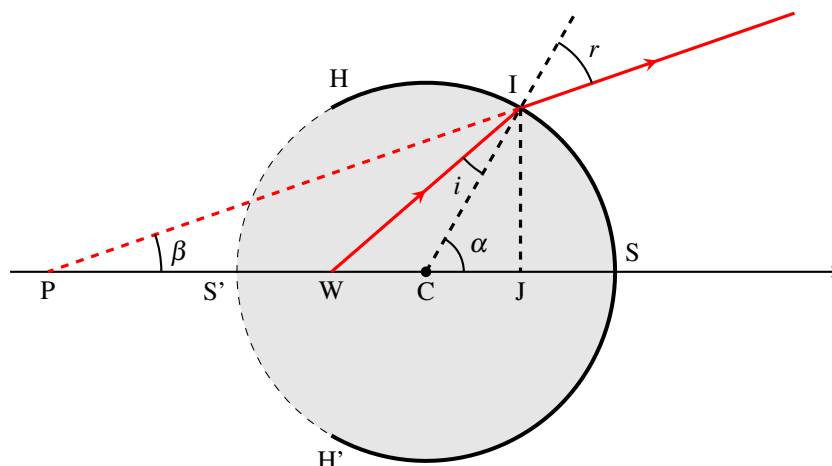


FIGURE 2 : Marche d'un rayon quelconque se réfractant à travers le dioptre HSH'

4. Montrer que :

$$R \sin \alpha = R \left(\frac{1}{n} + \cos \alpha \right) \tan(\alpha - i) = (CP + R \cos \alpha) \tan \beta$$

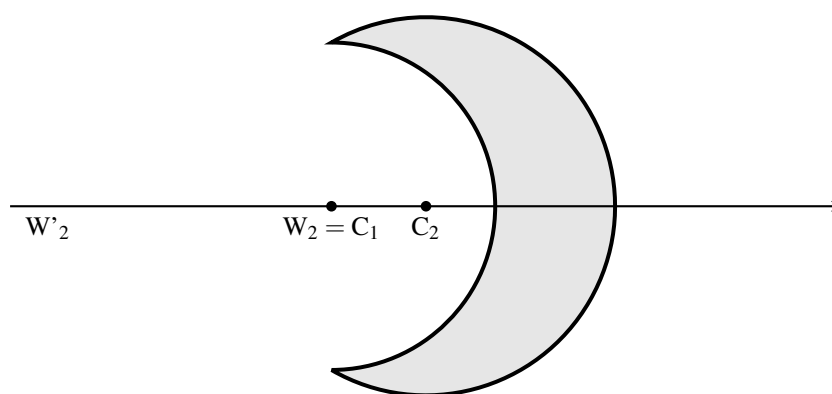
5. L'angle α étant un paramètre fixé arbitrairement, il s'agit de déterminer les quatre inconnues i , r , β et CP ; pour cela nous avons besoin au minimum de quatre équations reliant ces inconnues entre elles. Les résultats des questions 3 et 4 nous en fournissent déjà trois. Quel phénomène physique n'a-t-on pas encore traduit en équation ? Proposer alors une expression pour l'équation manquante.

6. La résolution du système, que l'on ne demande pas d'effectuer, conduit à :

$$\tan i = \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{n + \cos \alpha} \quad ; \quad \tan r = \frac{n \sin \alpha}{1 + n \cos \alpha}$$

Exprimer CP et justifier que **tout** rayon issu de W et se réfractant sur le dioptre HSH' émerge exactement dans la direction de W' .

On considère désormais la lentille ci-dessous, appelée *ménisque d'Amici*, constituée de deux dioptres sphériques. Elle est construite dans un matériau d'indice n , de sorte que le centre C_1 du dioptre d'entrée est confondu avec le point de Weierstrass W_2 du dioptre de sortie.



7. Tracer la marche d'un rayon issu de W_2 et traversant la lentille ; quelle est l'image de W_2 ?

Un ménisque d'Amici est **rigoureusement stigmatique** pour les points (W, W') . On pourrait montrer qu'il est également **aplanétique**, ce qui signifie qu'il produit l'image d'un petit objet situé autour de W avec un minimum d'aberrations, même en étant éclairé en-dehors des conditions de Gauss ! On trouve à l'adresse suivante une animation qui permet de visualiser ces propriétés :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optigeo/menisque.html>

Les ménisques d'Amici furent utilisés à une époque comme lentille frontale pour les microscopes.

Exercice 2 : Vibrations d'une goutte d'eau

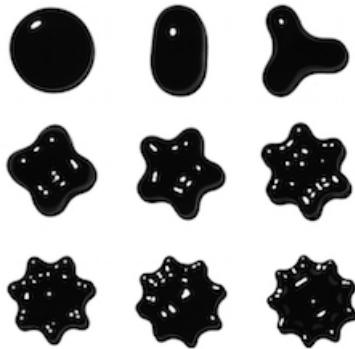


FIGURE 1 - Modes de vibration d'une goutte liquide

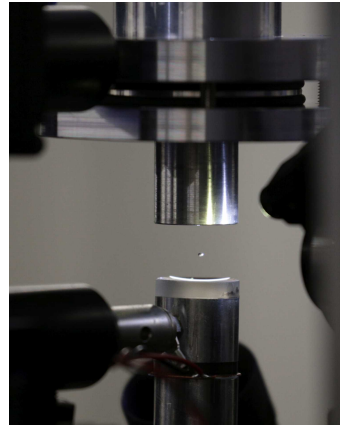


FIGURE 2 - Lévitation d'une goutte

Lorsqu'une goutte de liquide est soumise à des vibrations, elle se déforme en engendrant des lobes qui oscillent à sa surface. Ces oscillations sont amplifiées pour certaines fréquences de résonance qui ont été étudiées dès 1879 par Lord Rayleigh (voir figure 1). Ce phénomène est utilisé en métrologie (pour mesurer la viscosité ou la tension de surface d'un liquide) ou dans l'industrie (pharmaceutique, imprimante à jet d'encre, ou manipulation de gouttelettes en microfluidique) et un comportement similaire apparaît dans différents domaines : en astrophysique (pour modéliser des collisions de masses stellaires), en physique nucléaire et en biologie (modélisation du noyau). Pouvoir contrôler et modifier à distance les oscillations d'une goutte constitue un défi qui permettrait par exemple d'éviter certaines fréquences de résonance qui sont pénalisantes pour certaines applications.

On s'intéresse aux paramètres qui influent sur la fréquence de vibration f de ces gouttes. Après plusieurs tests, on en isole trois :

- le rayon R de la goutte,
- la masse volumique ρ du liquide,
- la tension de surface A du liquide (homogène à une force divisée par une longueur).

1. Proposer une relation homogène reliant la fréquence de vibration à ces trois paramètres sous la forme d'une loi de puissance.

Pour étudier l'influence du rayon de la goutte sur la fréquence de résonance, on réalise le protocole suivant pour des gouttes d'un même liquide (A et ρ inchangés), mais de rayons différents.

La méthode consiste à placer une goutte liquide en lévitation entre deux générateurs d'ondes ultrasonores (voir figure 2, une onde stationnaire apparaît entre les deux générateurs et les zones correspondants à des nœuds de surpression sont propices au piégeage d'objets de masse faible) et à observer ses vibrations à la caméra ultra-rapide. Pour un mode propre de vibration donné, on a regroupé dans le tableau ci-dessous les valeurs de fréquence obtenues pour différents rayons.

Rayon (en mm)	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
fréquence (en Hz)	137,2	48,7	26,5	17,1	12,3

2. À partir du résultat de la question 1, montrer que l'on peut écrire :

$$\ln f = a \ln R + \text{Cste}$$

Quelle est la valeur théorique de a ?

3. À l'aide d'une régression linéaire, comparez les résultats expérimentaux au modèle théorique.