Devoir n°5 (non surveillé)

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\left\{ \begin{array}{l} iz = \overline{z} \\ z\overline{z} = 1 \end{array} \right.$. On donnera les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8 - 2(i\sqrt{3} - 1)z^4 - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0,$$

et représenter dans le plan complexe les images de ses solutions.

EXERCICE 3

Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1) On pose $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

a) Que vaut $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$?

b) En déduire les valeurs de $\alpha+\beta$ et de $\alpha\beta$, puis trouver une équation du second degré dont α et β sont les solutions.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{2\pi}{5}$ et de $\cos \dfrac{4\pi}{5}$.

2) Soient A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient H et K les projetés orthogonaux respectifs de A_1 et A_2 sur l'axe des abscisses. Soit Ω le point d'affixe $-1/2$ et soit B le point d'affixe i. Le cercle de centre Ω passant par B coupe l'axe des abscisses en M et N, le point M ayant une abscisse positive.

Montrer que H est le milieu de $[OM]$ et que K est le milieu de $[ON]$.

3) En déduire une méthode simple de construction d'un pentagone régulier dont on connaît le centre et l'un des sommets.

Devoir n°5 (non surveillé)

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\left\{ \begin{array}{l} iz = \overline{z} \\ z\overline{z} = 1 \end{array} \right.$. On donnera les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8 - 2(i\sqrt{3} - 1)z^4 - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0,$$

et représenter dans le plan complexe les images de ses solutions.

EXERCICE 3

Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1) On pose $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

a) Que vaut $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$?

b) En déduire les valeurs de $\alpha+\beta$ et de $\alpha\beta$, puis trouver une équation du second degré dont α et β sont les solutions.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{2\pi}{5}$ et de $\cos \dfrac{4\pi}{5}$.

2) Soient A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient H et K les projetés orthogonaux respectifs de A_1 et A_2 sur l'axe des abscisses. Soit Ω le point d'affixe $-1/2$ et soit B le point d'affixe i. Le cercle de centre Ω passant par B coupe l'axe des abscisses en M et N, le point M ayant une abscisse positive.

Montrer que H est le milieu de $[OM]$ et que K est le milieu de $[ON]$.

3) En déduire une méthode simple de construction d'un pentagone régulier dont on connaît le centre et l'un des sommets.