Correction du DNS 4

EXERCICE 1

Noter d'abord que $\tan(x)\tan(2x)$ est défini si et seulement si $\begin{cases} x \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \mod \pi \\ 2x \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \mod \pi \end{cases}$, i.e. si $\begin{cases} x \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \mod \pi \\ x \not\equiv \dfrac{\pi}{4} \mod \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned}
\tan(x)\tan(2x) = 1 &\Leftrightarrow \tan(x)\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = 1 \\
&\Leftrightarrow 2\tan^2 x = 1 - \tan^2 x \\
&\Leftrightarrow 3\tan^2 x = 1 \\
&\Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\
&\Leftrightarrow (\exists\, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + k\pi) \text{ ou } (\exists\, k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{6} + k\pi).
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

EXERCICE 2

1) On a :

$$z^2 = (2\sqrt{3}-2)^2 + 2i(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2) + (2\sqrt{3}+2)^2 = 12 - 8\sqrt{3} + 4 + 2i(12-4) - (12 + 8\sqrt{3} + 4) = -16\sqrt{3} + 16i.$$

Pour mettre z^2 sous forme exponentielle on peut calculer son module et un de ses arguments, ou remarquer que :

$$z^2 = -16\sqrt{3} + 16i = 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 32\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 32e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

2) Les racines carrées de $32e^{i\frac{5\pi}{6}}$ sont $\sqrt{32}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ et $-\sqrt{32}e^{i\frac{5\pi}{12}}$. Comme la partie réelle de z est positive, on a donc

$$z = \sqrt{32}e^{i\frac{5\pi}{12}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

3) On a ainsi

$$4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3} - 2 + i(2\sqrt{3}+2).$$

En identifiant parties réelles et imaginaires on en déduit que

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

EXERCICE 3

1) On a

$$\begin{aligned}
f(z)\overline{f(z)} &= (e^{i3t} - e^{it} + 2)(e^{-i3t} - e^{-it} + 2) \\
&= 1 - e^{i2t} + 2e^{i3t} - e^{-i2t} + 1 - 2e^{it} + 2e^{-i3t} - 2e^{-it} + 4 \\
&= 2(e^{i3t} + e^{i3t}) - (e^{i2t} + e^{-i2t}) - 2(e^{it} + e^{-it}) + 6 \\
&= 4\cos 3t - 2\cos 2t - 4\cos t + 6.
\end{aligned}$$

2) a) La fonction g est dérivable comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $t \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned}
g'(t) &= -12\sin 3t + 4\sin 2t + 4\sin t \\
&= 48\sin^3 t - 36\sin t + 8\sin t\cos t + 4\sin t \\
&= 48\sin^3 t - 32\sin t + 8\sin t\cos t \\
&= \sin t(48\sin^2 t + 8\cos t - 32) \\
&= \sin t(48(1-\cos^2 t) + 8\cos t - 32) \\
&= \sin t(-48\cos^2 t + 8\cos t + 16) \\
&= -8\sin t(6\cos^2 t - \cos t - 2).
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $6X^2 - X - 2$ est 49 et ses racines sont $\dfrac{1-7}{12} = -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1+7}{12} = \dfrac{2}{3}$. Ainsi

$$6X^2 - X - 2 = 6\left(X + \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{2}{3}\right)$$

et donc

$$g'(t) = -48\sin t\left(\cos t + \frac{1}{2}\right)\left(\cos t - \frac{2}{3}\right).$$

b) Sur l'intervalle $[0, \pi]$:

- $\sin t$ s'annule en 0 et en π et est strictement positif ailleurs,
- $\cos t + \dfrac{1}{2}$ s'annule en $\dfrac{2\pi}{3}$, est strictement positif avant $\dfrac{2\pi}{3}$ et strictement négatif après,
- $\cos t - \dfrac{2}{3}$ s'annule en un unique réel $\alpha \in]0, \pi/2[$, est strictement positif avant α et strictement négatif après.

Avec un tableau de signes on en déduit que g' s'annule en 0, α, $2\pi/3$ et π, est strictement positive sur $]\alpha, 2\pi/3[$ et strictement négative ailleurs. Les variations de g s'en déduisent.

On a facilement $g(0) = 4$, $g(\pi) = 4$, $g(2\pi/3) = 13$ et en écrivant $g(t) = 4(4\cos^3 t - 3\cos t) - 2(2\cos^2 t - 1) - 4\cos t + 6$ on trouve que $g(\alpha) = 8/27$.

3) D'après l'étude précédente, le minimum de la fonction g sur $[0, \pi]$ est $8/27$ et son maximum est 13. Comme g est paire et 2π-périodique, ce sont des minimum/maximum sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On a obtenu ainsi les valeurs minimale et maximale de $f(z)\overline{f(z)}$, i.e. de $|f(z)|^2$, lorsque $|z| = 1$. Les valeurs minimale et maximale de $|f(z)|$ lorsque $|z| = 1$ sont donc respectivement $\sqrt{\dfrac{8}{27}}$ et $\sqrt{13}$.