Devoir n°7 (non surveillé)

EXERCICE 1 - Cosinus et sinus d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe z on pose :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

1) Si z est réel, on retrouve le cosinus et le sinus habituels : pourquoi ?

2) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{3} + i\,\frac{\ln 2}{2}\right)$. On donnera le résultat sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

3) Montrer que :

a) $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\cos(-z) = \cos(z)$ et $\sin(-z) = -\sin(z)$.

b) $\forall\, a, b \in \mathbb{C}$, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

c) $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = \frac{3i}{4}$.

5) a) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $\cos(z)$ en fonction de $\cos(x)$, $\sin(x)$, e^y et e^{-y}.

b) En déduire l'ensemble des nombres complexes z tels que $\cos(z)$ est réel et représenter cet ensemble dans le plan complexe.

EXERCICE 2

L'objectif de l'exercice est de déterminer les droites tangentes à la fois à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien et à celle de la fonction exponentielle.

On note respectivement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes d'équation $y = e^x$ et $y = \ln x$ dans un repère orthonormal du plan.

1) a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner une équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.

b) Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. Donner une équation de la tangente T'_b à $\mathcal{C}'$ au point d'abscisse b.

c) Montrer que les droites T_a et T'_b sont confondues si et seulement si $b = e^{-a}$ et $e^{-a} = \frac{a-1}{a+1}$.

2) On considère la fonction f définie pour tout réel x différent de -1 par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}e^x$.

a) Étudier les variations de f sur $I = [0, +\infty[$ et la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet dans I une unique solution, que l'on notera α.

c) Pour tout réel x différent de 1 et de -1, calculer le produit $f(x) \times f(-x)$. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ de l'équation $f(x) = 1$.

3) a) Déduire des questions précédentes que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont deux tangentes communes.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces tangentes avec les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et en déduire qu'elles sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

c) Tracer $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et leurs tangentes communes. On donne $\alpha \approx 1{,}5$, $e^{\alpha} \approx 4{,}7$ et $e^{-\alpha} \approx 0{,}2$.

EXERCICE 3 - Une équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\; xf(x) + f(1-x) = x^2.$$

On raisonnera par analyse-synthèse.