

Correction du DNS 5

EXERCICE 1

Il y a plusieurs manières de résoudre ce système. On peut poser $z = x + iy$ avec x, y réels. Le système devient :

$$\begin{cases} i(x + iy) = x - iy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + ix = x - iy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = x \\ x = -y \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1/\sqrt{2} \\ x = 1/\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 1/\sqrt{2} \\ x = -1/\sqrt{2} \end{cases}.$$

Il y a donc deux solutions : $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

On peut poser $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Le système devient :

$$\begin{cases} e^{i\pi/2} \rho e^{i\theta} = \rho e^{-i\theta} \\ \rho^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{i(\theta+\pi/2)} = e^{-i\theta} \\ \rho = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta + \pi/2 \equiv -\theta [2\pi] \\ \rho = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta \equiv -\pi/2 [2\pi] \\ \rho = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv -\pi/4 [\pi] \\ \rho = 1 \end{cases}.$$

On retrouve les deux solutions : $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Enfin, puisque 0 n'est pas solution, on peut multiplier la première ligne par z :

$$\begin{cases} iz = \bar{z} \\ z\bar{z} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz^2 = z\bar{z} \\ z\bar{z} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz^2 = 1 \\ z\bar{z} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -i \\ z\bar{z} = 1 \end{cases}$$

et les racines carrées de $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ sont $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

EXERCICE 2

Posons $Z = z^4$. L'équation devient

$$(E') : Z^4 - 2(i\sqrt{3} - 1)Z - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0.$$

C'est une équation du second degré dont le discriminant est $4(i\sqrt{3} - 1)^2 + 32(1 + i\sqrt{3}) = 24 + 24i\sqrt{3}$. En appliquant la méthode vue en cours, on trouve que les racines carrées de $24 + 24i\sqrt{3}$ sont $6 + 2i\sqrt{3}$ et $-6 - 2i\sqrt{3}$ (on peut aussi remarquer que $24 + 24i\sqrt{3} = 48e^{i\pi/3}$). Les solutions de (E') sont donc $\frac{2(i\sqrt{3} - 1) + 6 + 2i\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $\frac{2(i\sqrt{3} - 1) - 6 - 2i\sqrt{3}}{2} = -4$.

Réolvons l'équation $z^4 = 2 + 2i\sqrt{3}$. On a $2 + 2i\sqrt{3} = 4e^{i\pi/3}$ donc on voit que $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/12}$ est solution. En multipliant par les racines quatrièmes de l'unité on obtient toutes les solutions : $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/12}$, $\sqrt[4]{2}e^{i7\pi/12}$, $\sqrt[4]{2}e^{i13\pi/12}$ et $\sqrt[4]{2}e^{i19\pi/12}$.

Réolvons l'équation $z^4 = -4$. On a $-4 = 4e^{i\pi}$ donc on voit que $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/4}$ est solution. En multipliant par les racines quatrièmes de l'unité on obtient toutes les solutions : $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/4}$, $\sqrt[4]{2}e^{i3\pi/4}$, $\sqrt[4]{2}e^{i5\pi/4}$ et $\sqrt[4]{2}e^{i7\pi/4}$.

L'équation a donc huit solutions :

$$\sqrt[4]{2}e^{i\pi/12}, \sqrt[4]{2}e^{i7\pi/12}, \sqrt[4]{2}e^{i13\pi/12}, \sqrt[4]{2}e^{i19\pi/12}, \sqrt[4]{2}e^{i\pi/4}, \sqrt[4]{2}e^{i3\pi/4}, \sqrt[4]{2}e^{i5\pi/4} \text{ et } \sqrt[4]{2}e^{i7\pi/4}.$$

EXERCICE 3

1) a) C'est une somme géométrique :

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0$$

car $\omega^5 = e^{i2\pi} = 1$.

b) On a

$$\alpha + \beta = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$$

et

$$\alpha\beta = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1$$

car $\omega^6 = \omega$ et $\omega^7 = \omega^2$.

On en déduit que α et β sont les solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$ (cf proposition 22 du cours sur les complexes).

c) Les solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$ sont $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

De plus $\alpha = e^{i2\pi/5} + e^{i8\pi/5} = e^{i2\pi/5} + e^{-i2\pi/5} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\beta = e^{i4\pi/5} + e^{i6\pi/5} = e^{i4\pi/5} + e^{-i4\pi/5} = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

On en déduit que $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ (car $\alpha > 0$ et $\beta < 0$) puis que

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

2) D'après le théorème de Pythagore on a $\Omega B = \Omega M = \Omega N = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Par conséquent le point M a pour affixe $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et le point N a pour affixe $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

De plus l'affixe de A_1 est $e^{i2\pi/5}$ donc l'affixe de H , qui est le projeté orthogonal de A_1 sur l'axe des abscisses, est $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$. De même, l'affixe de K est $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$.

Par conséquent H est le milieu de $[OM]$ et K est le milieu de $[ON]$.

3) Appelons O le centre du pentagone et A_0 le sommet connu.

On commence par tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre O qui passe par A_0 .

Soit C le deuxième point d'intersection de la droite (OA_0) et du cercle et soit B un des points d'intersection de la perpendiculaire à (OA_0) qui passe par O .

Soit Ω le milieu de $[OC]$. Soient M et N les points d'intersection du cercle de centre Ω et de rayon $[\Omega B]$ et de la droite (OA_0) .

Les points d'intersection des droites perpendiculaires à (OA_0) qui passent respectivement par M et par N avec le cercle $\mathcal{C}$ sont les quatre autres sommets du pentagone.