Devoir n°8 (non surveillé)

EXERCICE 1 - Calculs de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{(x - 2)^2} ; g(x) = \ln \frac{\sqrt{x}}{x - 1} ; h(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}} ; i(x) = \cos^3 x$$

$$j(x) = (x^x)^x ; k(x) = \operatorname{ch}(\tan x) ; \ell(x) = 2023^{\operatorname{sh}(\sqrt{x})}.$$

On précisera leurs ensembles de dérivabilité (en justifiant rapidement) et on s'efforcera de mettre les résultats sous une forme qui permettrait ensuite d'étudier facilement leurs signes (mais cette étude n'est pas demandée).

EXERCICE 2

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$ n'est pas périodique.

EXERCICE 3 - L'inégalité de Cauchy-Schwarz

1) Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels. Le but de cette question est d'établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Pour cela on pose, pour tout réel x , $P(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2$.

a) Justifier que $P(x)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 2 et préciser ses coefficients (sous forme de sommes) et son discriminant.

b) Justifier que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le polynôme $P(x)$ peut-il avoir exactement deux racines réelles distinctes? Que peut-on alors dire du signe de son discriminant?

c) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à des réels bien choisis, établir les inégalités suivantes :

a) $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2.$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n i\sqrt{i} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$

c) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, (x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$