TD5 : Circuits linéaires - corrigé

Exercice 1 : Loi d'évolution

a) $\boxed{U = -E - RI}$.

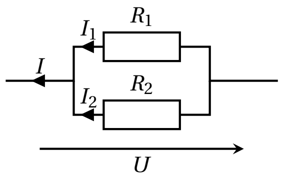
b) $\boxed{U = -E + RI}$.

c) Loi des nœuds : $I = -I_0 + \frac{U}{R} \iff \boxed{U = R(I + I_0)}$.

d) Loi des nœuds : $I = I_0 - \frac{U}{R} \iff \boxed{U = R(I_0 - I)}$.

⋆ Exercice 2 : Puissance reçue

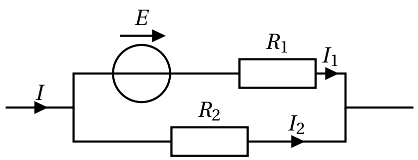
a)



D'après la loi d'Ohm, $I_1 = \frac{U}{R_1} = 1\,\text{A}$ et $I_2 = \frac{U}{R_2} = 2\,\text{A}$. D'après la loi des nœuds : $\boxed{I = I_1 + I_2 = 3\,\text{A}}$.

Les puissances reçues par R_1 et R_2 valent respectivement $\boxed{\mathscr{P}_1 = R_1 I_1^2 = 10\,\text{W}}$ et $\boxed{\mathscr{P}_2 = R_2 I_2^2 = 20\,\text{W}}$.

b)



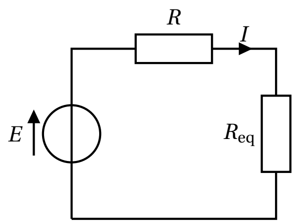
D'après la loi des mailles : $E - R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0 \iff I_1 = \frac{E + R_2 I_2}{R_1} = 1\,\text{A}$. D'après la loi des nœuds, $\boxed{I = I_1 + I_2 = 1{,}2\,\text{A}}$.

Les puissances reçues par R_1 et R_2 valent respectivement $\boxed{\mathscr{P}_1 = R_1 I_1^2 = 2\,\text{W}}$ et $\boxed{\mathscr{P}_2 = R_2 I_2^2 = 0{,}2\,\text{W}}$.

La puissance reçue par la source idéale de tension vaut $\boxed{\mathscr{P}_E = -E I_1 = -1\,\text{W}}$.

⋆ Exercice 3 : Calcul d'intensité

On note I l'intensité qui circule dans R et on simplifie le schéma en associant les résistances R_1 et R_2 en dérivation. La résistance équivalente, notée R_{eq}, vaut $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

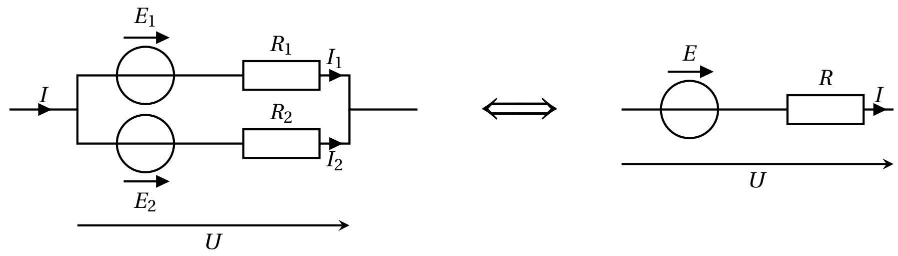


D'après la loi de Pouillet : $I = \frac{E}{R + R_{\text{eq}}}$. Pour déterminer I_1 et I_2, on utilise ensuite la loi du pont diviseur de courant :

$$I_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{E}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \iff \boxed{I_1 = \frac{R_2 E}{R_1 R + R_2 R + R_1 R_2}}$$

$$I_2 = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{E}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \iff \boxed{I_2 = \frac{R_1 E}{R_1 R + R_2 R + R_1 R_2}}$$

⋆ Exercice 4 : Association de générateurs linéaires



L'objectif de cet exercice est de démontrer que la relation $U = f(I)$ pour l'association en dérivation de deux générateurs de Thévenin peut s'écrire sous la forme $U = E - RI$, comme ce serait le cas pour un générateur de Thévenin unique, avec E la fem équivalente et R la résistance équivalente, que l'on va chercher à exprimer en fonction de E_1,E_2, R_1 et R_2.

Dans un premier temps, on peut écrire :

$$U = E_1 - R_1 I_1 \iff I_1 = \frac{E_1 - U}{R_1} \quad \text{et} \quad U = E_2 - R_2 I_2 \iff I_2 = \frac{E_2 - U}{R_2}$$

D'après la loi des nœuds : $I = I_1 + I_2 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} U$.

En isolant U, on obtient : $U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I + \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2}$. Cette relation est bien analogue à celle d'un générateur de Thévenin unique, avec par identification :

$$\boxed{E = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

⋆ Exercice 5 : Circuit linéaire

1. La tension U est la même aux bornes des trois branches. On peut donc écrire que :

$$\begin{cases} U = E_1 - R_1 I_1 \iff I_1 = \frac{E_1 - U}{R_1} = G_1(E_1 - U) \\ U = RI \iff I = GU \\ U = -E_2 - R_2 I_2 \iff I_2 = \frac{-E_1 - U}{R_2} = -G_2(E_2 + U) \end{cases}$$

D'après la loi des nœuds :

$$I = I_1 + I_2 \iff GU = G_1E_1 - G_2E_2 - G_1U - G_2U \iff \boxed{U = \frac{G_1E_1 - G_2E_2}{G + G_1 + G_2}}$$

2. La tension U vaut :

$$\boxed{U = \frac{\frac{E_1}{2R} - \frac{E_2}{R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{E_1 - 2E_2}{5} = -1,0\,\mathrm{V}}$$

D'après le calcul effectué à la question 1 :

$$\boxed{I_1 = \frac{E_1 - U}{2R} = \frac{2E_1 + E_2}{5R} = 0,80\,\mathrm{A}}$$

⋆ Exercice 6 : Pont de Wheatstone

1. On note $u_3 = u_{AD}$ la tension aux bornes de R_3 et $u_1 = u_{AC}$ la tension aux bornes de R_1. D'après la loi du pont diviseur de tension :

$$u_3 = \frac{R_3}{R_3+R_4}E \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2}E$$

On exploite l'additivité des tensions :

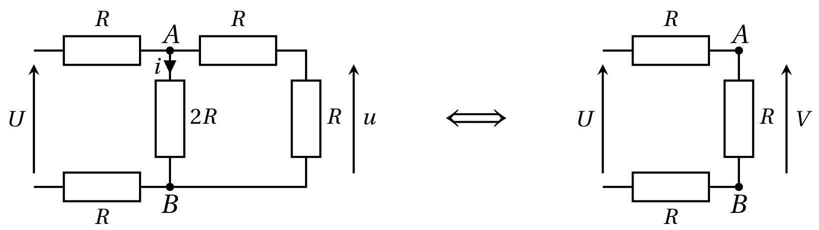
$$u = u_{CD} = u_{CA} + u_{AD} = u_3 - u_4 = \left(\frac{R_3}{R_3+R_4} - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right)E \iff \boxed{u = \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}E}$$

2. Le pont est équilibré lorsque $u = 0 \iff R_1R_4 = R_2R_3$. On en déduit la valeur de R_1 :

$$\boxed{R_1 = \frac{R_2R_3}{R_4} = 36,5\,\Omega}$$

⋆⋆ Exercice 7 : Associations de résistances

a) Dans un premier temps, on note $R = 5\,\Omega$ et $U = 10\,\mathrm{V}$ la tension aux bornes du dipôle. On simplifie le schéma du circuit en rassemblant les deux résistances de $5\,\Omega$ en série ($R_{\mathrm{eq},1} = 2R = 10\,\Omega$), puis en rassemblant les deux résistances de $10\,\Omega$ en dérivation ($R_{\mathrm{eq},2} = R = 5\,\Omega$).

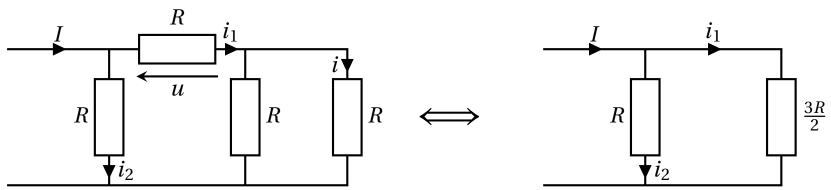


On applique la loi du pont diviseur de tension : $V = \frac{U}{3} = 3,3\,\mathrm{V}$. Par définition, $V = u_{AB}$. D'après la loi d'Ohm (voir schéma de gauche) :

$$V = 2Ri \iff \boxed{i = \frac{V}{2R} = 0,33\,\mathrm{A}}$$

On applique encore la loi du pont diviseur de tension pour déterminer u : $\boxed{u = \frac{V}{2} = 1,7\,\mathrm{V}}$.

b) Désormais, on pose $R = 10\,\Omega$ et $I = 5\,\mathrm{A}$ l'intensité du courant qui alimente le dipôle. On simplifie le schéma en rassemblant les deux résistances à droite du schéma, en dérivation ($R_{\mathrm{eq},1} = \frac{R}{2} = 5\,\Omega$), puis en rassemblant $R_{\mathrm{eq},1}$ en série avec la résistance aux bornes de laquelle la tension vaut u ($R_{\mathrm{eq},2} = \frac{3R}{2} = 15\,\Omega$).



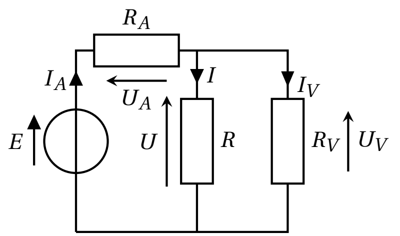
On applique la loi du pont diviseur de courant : $i_1 = \frac{\frac{2}{3R}}{\frac{1}{R}+\frac{2}{3R}}I = \frac{2I}{5} = 2\,\mathrm{A}$. D'après la loi d'Ohm (voir schéma de gauche) : $\boxed{u = Ri_1 = 20\,\mathrm{V}}$.

On applique encore la loi du pont diviseur de courant pour déterminer i : $\boxed{i = \frac{i_1}{2} = 1\,\mathrm{A}}$.

⋆⋆ Exercice 8 : Montage amont/aval

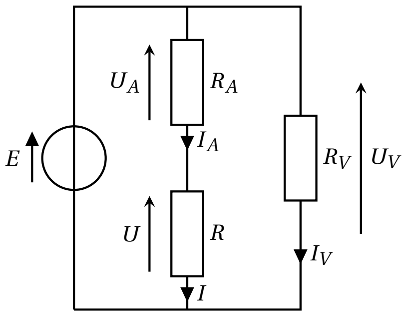
1. Dans le montage aval, le voltmètre est branché en dérivation avec R; il permet de mesurer la tension à ses bornes ($U_V = U$). En revanche, l'ampèremètre n'est pas branché en série avec R. Bien que le courant qui circule dans le voltmètre est généralement faible car sa résistance d'entrée est élevée, **on fait une erreur systématique sur la valeur de l'intensité lorsque l'on réalise le montage aval** ($I_A \neq I$).
Dans le montage amont, l'ampèremètre est branché en série avec R; il permet de mesurer l'intensité du courant qui la traverse ($I_A = I$). En revanche, le voltmètre n'est pas branché en dérivation avec R. Bien que la tension aux bornes de l'ampèremètre est généralement faible car sa résistance d'entrée est faible, **on fait une erreur systématique sur la valeur de la tension lorsque l'on réalise le montage amont** ($U_V \neq U$).
En conclusion, **aucun des deux montages ne permet de mesurer simultanément des valeurs correctes de tension et d'intensité**.

2. On commence par reproduire le schéma du montage, en remplaçant l'ampèremètre et le voltmètre par leur résistance d'entrée associée.



D'après la loi des nœuds : $I_A - I = I_V$. D'après la loi d'Ohm, $U = RI = R_V I_V \iff \boxed{\dfrac{I_A - I}{I} = \dfrac{I_V}{I} = \dfrac{R}{R_V}}$.

3. On reproduit à nouveau le schéma du montage en remplaçant l'ampèremètre et le voltmètre par leur résistance d'entrée associée.



D'après la loi des mailles : $U_V - U = U_A$. D'après la loi d'Ohm, $I = \frac{U_A}{R_A} = \frac{U}{R} \iff \boxed{\dfrac{U_V - U}{U} = \dfrac{U_A}{U} = \dfrac{R_A}{R}}$.

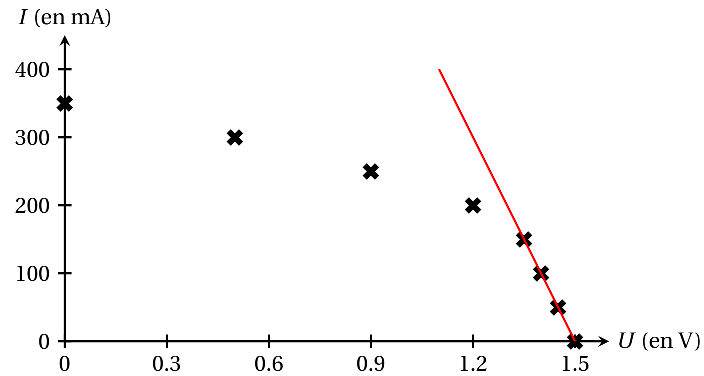
4. Le montage le plus approprié est celui pour lequel l'erreur relative est la plus faible. Le montage aval est adapté au cas de faibles résistances ($R \ll R_V$), le montage amont au cas de fortes résistances ($R \gg R_A$). Le cas limite est celui pour lequel les erreurs relatives sont identiques. Cela arrive lorsque $\frac{R}{R_V} = \frac{R_A}{R} \iff R = \sqrt{R_A R_V}$. En prenant comme valeurs numériques $R_V = 10\,\mathrm{M\Omega}$ et $R_A = 0,1\,\Omega$, on obtient une résistance limite $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$.
En conclusion, **si $R < 1\,\mathrm{k\Omega}$ alors on utilisera le montage aval. Si $R > 1\,\mathrm{k\Omega}$, on utilisera la montage amont**.

⋆⋆ Exercice 9 : Adaptation d'impédance

Notons I l'intensité du courant dans le circuit. D'après la loi de Pouillet : $I = \frac{E}{r+R}$. La puissance consommée par R vaut donc $\mathscr{P} = RI^2 = \frac{RE^2}{(r+R)^2}$.
On étudie les variations de la fonction $\mathscr{P}(R)$, en commençant par calculer sa dérivée : $\mathscr{P}'(R) = \frac{r^2 - R^2}{(r+R)^4} E$.
$\mathscr{P}'$ s'annule pour $\boxed{R_0 = r}$. Pour cette valeur de résistance, la puissance consommée est maximale et vaut $\mathscr{P}_{\max} = \frac{E^2}{4r}$.

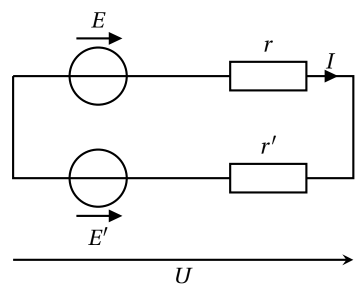
⋆⋆ Exercice 10 : Caractéristique d'une pile

1.



2. On a représenté ci-dessus le modèle linéaire correspondant aux faibles intensités. La fem correspond à la tension à vide ($I = 0$), donc $\boxed{E = 1,5\,\mathrm{V}}$. La pente du modèle est égale à $-\frac{1}{r}$. À partir des deux premières valeurs du tableau, on estime que $\boxed{r = 1\,\Omega}$.

3. On suppose que la pile fonctionne dans le domaine pour lequel le modèle précédent s'applique. On représente schématiquement le montage.

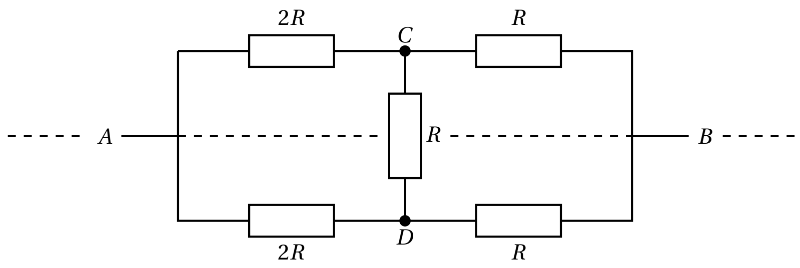


D'après la loi de Pouillet, le courant qui circule dans la maille vaut $\boxed{I = \dfrac{E - E'}{r + r'} = 0,2\,\mathrm{A}}$.

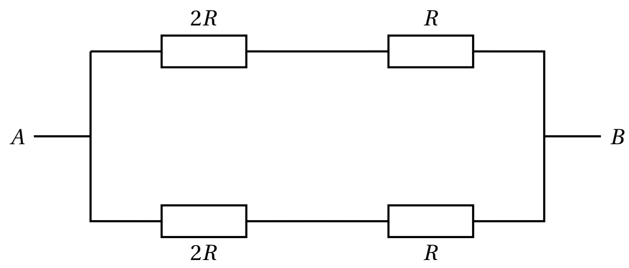
La puissance échangée entre la pile et le moteur vaut $\boxed{\mathscr{P} = UI = (E - rI)\,I = 0,26\,\mathrm{W}}$.

⋆⋆⋆ Exercice 11 : Résistance équivalente

Déterminer la résistance équivalente entre les bornes A et B du dipôle ci-dessous :



Le circuit ci-dessus possède un plan de symétrie, passant par les point A et B (voir schéma). On en déduit que les potentiels électriques sont nécessairement égaux de part et d'autre de ce plan. En particulier, cela signifie que $V_C = V_D$, donc que la tension aux bornes de la résistance centrale est nulle. D'après la loi d'Ohm, **le courant dans la branche centrale est nul** lui aussi. Par conséquent, cette branche se comporte comme un interrupteur ouvert. On peut la supprimer du schéma.



Désormais, le calcul de la résistance équivalente est immédiat. On rassemble les résistances en série $\left(R_{\text{eq},1} = 3R\right)$, puis on rassemble les deux résistances de $3R$ en dérivation : $\boxed{R_{\text{eq}} = \dfrac{3R}{2}}$.