Correction du DNS 7

EXERCICE 1

1) Si z est réel, d'après les formules d'Euler, on retrouve le cosinus et le sinus usuels.

2) On a :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{3}+i\,\frac{\ln 2}{2}\right) &= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{3}+i\,\frac{\ln 2}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{3}+i\,\frac{\ln 2}{2}\right)}}{2}\\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{3}-\frac{\ln 2}{2}}+e^{-i\frac{\pi}{3}+\frac{\ln 2}{2}}}{2}\\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-\frac{\ln 2}{2}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{\frac{\ln 2}{2}}}{2}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{2}}{2} \qquad \left(\text{car } e^{\frac{\ln 2}{2}}=e^{\ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\right)\\
&= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{2}\\
&= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{2}\\
&= \frac{3\sqrt{2}}{8}-i\frac{\sqrt{6}}{8}.
\end{aligned}$$

Le module de ce nombre est

$$\sqrt{\frac{18}{64}+\frac{6}{64}}=\sqrt{\frac{24}{64}}=\frac{2\sqrt{6}}{8}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

et si θ en est un argument on a

$$\cos\theta=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{8}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}\times\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta=\frac{-\frac{\sqrt{6}}{8}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=-\frac{\sqrt{6}}{8}\times\frac{4}{\sqrt{6}}=-\frac{1}{2}$$

donc on peut prendre $\theta=-\frac{\pi}{6}$. Ainsi

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+i\,\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

3) a) Pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$\cos(-z)=\frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2}=\cos(z) \qquad \text{et} \qquad \sin(-z)=\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i}=-\sin(z).$$

b) Soient $a,b\in\mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}-\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2}\\
&= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})}{4}-\frac{(e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib})}{-4}\\
&= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})+(e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib})}{4}\\
&= \frac{e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{i(-a+b)}+e^{i(-a-b)}+e^{i(a+b)}-e^{i(a-b)}-e^{i(-a+b)}+e^{i(-a-b)}}{4}\\
&= \frac{2e^{i(a+b)}+2e^{i(-a-b)}}{4}\\
&= \frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2}\\
&= \cos(a+b).
\end{aligned}$$

c) Soit $z\in\mathbb{C}$. En prenant $a=z$ et $b=-z$ dans l'égalité précédente on obtient :

$$\cos(z-z)=\cos(z)\cos(-z)-\sin(z)\sin(-z)=\cos(z)\cos(z)+\sin(z)\sin(z)=\cos^2(z)+\sin^2(z)$$

donc $\cos^2(z)+\sin^2(z)=\cos(0)=1$.

4) On a :

$$\begin{aligned}
\cos z = \frac{3i}{4} &\Leftrightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{3i}{4}\\
&\Leftrightarrow e^{iz}+e^{-iz} = \frac{3i}{2}\\
&\Leftrightarrow e^{iz} - \frac{3i}{2} + e^{-iz} = 0\\
&\Leftrightarrow e^{2iz} - \frac{3i}{2}e^{iz} + 1 = 0 \quad (\text{car } e^{iz} \neq 0).
\end{aligned}$$

On pose $Z = e^{iz}$. L'équation devient

$$(*) \quad Z^2 - \frac{3i}{2}Z + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = -\frac{9}{4} - 4 = -\frac{25}{4}$. Les racines carrées complexes de Δ sont $\frac{5i}{2}$ et $-\frac{5i}{2}$ donc les solutions de l'équation $(*)$ sont

$$Z_1 = \frac{\frac{3i}{2} - \frac{5i}{2}}{2} = -\frac{i}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{\frac{3i}{2} + \frac{5i}{2}}{2} = 2i.$$

Il reste à résoudre $e^{iz} = Z_1$ et $e^{iz} = Z_2$. En posant $z = x+iy$ (où x et y sont des réels) on a :

$$\begin{aligned}
e^{iz} = -\frac{i}{2} &\Leftrightarrow e^{ix-y} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}\\
&\Leftrightarrow e^{-y}e^{ix} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{-y} = 1/2\\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \ln 2\\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\ln 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{iz} = 2i &\Leftrightarrow e^{ix-y} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}\\
&\Leftrightarrow e^{-y}e^{ix} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{-y} = 2\\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\ln 2\\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln 2.
\end{aligned}$$

5) a) On a :

$$\begin{aligned}
\cos(x+iy) &= \frac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{2}\\
&= \frac{e^{ix}e^{-y}+e^{-ix}e^{y}}{2}\\
&= \frac{(\cos x + i\sin x)e^{-y} + (\cos x - i\sin x)e^{y}}{2}\\
&= \frac{\cos x(e^{-y}+e^{y}) + i\sin x(e^{-y}-e^{y})}{2}\\
&= \cos x\,\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - i\sin x\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}
\end{aligned}$$

donc la partie réelle de $\cos(z)$ est $\cos x\,\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ et sa partie imaginaire est $-\sin x\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$.

b) On pose à nouveau $z = x+iy$ où x et y sont des réels. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\cos(z) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow -\sin x\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = 0\\
&\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } e^{y} = e^{-y}\\
&\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi) \text{ ou } y = 0.
\end{aligned}$$

L'ensemble des images des complexes z tel que $\cos(z)$ est réel est donc la réunion de l'axe des réels et des droites verticales d'équations $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2

1) a) Une équation de T_a est $y = e^a(x-a) + e^a$.

b) Une équation de T'_b est $y = \frac{1}{b}(x-b) + \ln b$.

c) T_a et T'_b sont confondues si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^a(x-a)+e^a = \frac{1}{b}(x-b)+\ln b$, soit $e^a x - ae^a + e^a = \frac{1}{b}x - 1 + \ln b$, donc si et seulement si $\begin{cases} e^a = \frac{1}{b} \\ -ae^a + e^a = -1 + \ln b \end{cases}$, soit $\begin{cases} b = e^{-a} \\ (1-a)e^a = -1-a \end{cases}$, soit encore $\begin{cases} b = e^{-a} \\ e^{-a} = \dfrac{a-1}{a+1} \end{cases}$.

2) a) Par les théorèmes généraux, f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur I. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-1/x}{1+1/x}e^x = +\infty$.

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur I, donc elle définit une bijection de I dans $f(I) = [-1,+\infty[$. L'équation $f(x)=1$ a donc une unique solution sur I.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, on a : $f(x)\times f(-x) = \dfrac{x-1}{x+1}e^x \dfrac{-x-1}{-x+1}e^{-x} = \dfrac{x-1}{x+1}e^x \dfrac{x+1}{x-1}e^{-x} = 1$.

Si $x<0$ et $x \neq -1$, on a : $f(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(-x)} = 1 \Leftrightarrow f(-x) = 1 \Leftrightarrow -x = \alpha \Leftrightarrow x = -\alpha$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ est donc $\{\alpha, -\alpha\}$.

3) a) D'après 1)c), les droites T_a et T'_b sont confondues si et seulement si $\begin{cases} f(a) = 1 \\ b = e^{-a} \end{cases}$, i.e. si et seulement si $\begin{cases} a = \alpha \\ b = e^{-\alpha} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -\alpha \\ b = e^{\alpha} \end{cases}$ d'après la question précédente.

Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont donc deux tangentes communes : les droites T_α et $T_{-\alpha}$.

b) La droite T_α rencontre $\mathcal{C}$ en $A(\alpha, e^\alpha)$ et $\mathcal{C}'$ en $A'(e^{-\alpha}, -\alpha)$ (car $T_\alpha = T'_{e^{-\alpha}}$).

La droite $T_{-\alpha}$ rencontre $\mathcal{C}$ en $B(-\alpha, e^{-\alpha})$ et $\mathcal{C}'$ en $B'(e^\alpha, \alpha)$ (car $T_{-\alpha} = T'_{e^\alpha}$).

Les points A et B' sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$ et les points A' et B aussi, donc les droites $T_\alpha = (AA')$ et $T_{-\alpha} = (BB')$ également.

EXERCICE 3

On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : soit f une solution du problème, c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$xf(x) + f(1-x) = x^2 \qquad (1)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En remplaçant x par $1-x$ on a aussi

$$(1-x)f(1-x) + f(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad (2)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, en multipliant (1) par $1-x$, on obtient

$$(x-x^2)f(x) + (1-x)f(1-x) = x^2 - x^3 \qquad (3)$$

et en retranchant (2) de (3) on obtient

$$(x - x^2 - 1)f(x) = -x^3 + 2x - 1$$

ou encore

$$(x^2 - x + 1)f(x) = x^3 - 2x + 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $x^2 - x + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (son discriminant est -3), on a finalement

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - x + 1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Synthèse : posons $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - x + 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$xf(x) + f(1-x) = \frac{x^4 - 2x^2 + x}{x^2 - x + 1} + \frac{(1-x)^3 - 2(1-x) + 1}{(x-1)^2 - (1-x) + 1} = \frac{x^4 - 2x^2 + x}{x^2 - x + 1} + \frac{-x^3 + 3x^2 - x}{x^2 - x + 1} = \frac{x^4 - x^3 + x^2}{x^2 - x + 1} = x^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est donc la seule solution du problème.