Corrigé DS2

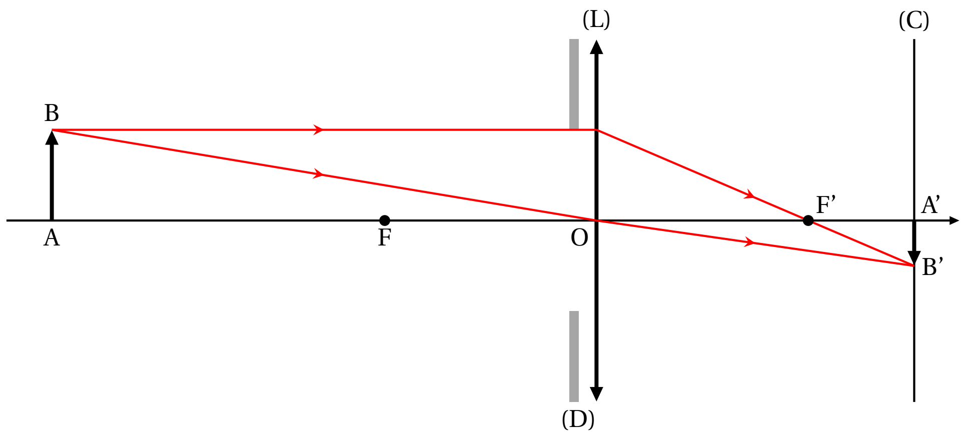
Exercice 1 : Utilisation d'un appareil photographique

Q1.a) On parle de conditions de Gauss quand on sélectionne uniquement des **rayons paraxiaux**, c'est-à-dire :

- peu inclinés par rapport à l'axe optique,
- proches de l'axe optique.

Q1.b) Le **diaphragme** permet de sélectionner uniquement les rayons paraxiaux.

Q2.a) On représente schématiquement la situation :



Q2.b) On utilise une relation de grandissement de la lentille :

$$\frac{\overline{\text{A'B'}}}{h} = \frac{\overline{\text{FO}}}{\overline{\text{FA}}} = \frac{\overline{\text{FO}}}{\overline{\text{FO}}+\overline{\text{OA}}} \iff \boxed{\overline{\text{A'B'}} = \frac{f'}{f'-L}h = -12{,}5\,\text{mm}}$$

Q2.c) La taille de l'image de l'arbre est inférieure aux dimensions du capteur donc **il est possible de voir l'arbre en entier sur la photo**.

Q3.a) Lorsque l'objet à l'infini, son image par la lentille se trouve dans le **plan focal image**. Dans ce cas, $\boxed{d_{\text{min}} = f'}$.

Q3.b) On écrit la relation de conjugaison de Descartes, avec $\overline{OA} = -L$ et $\overline{OA'} = d$:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{L} = \frac{1}{f'} \iff \frac{1}{d} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{L}$$

$$\iff d = \frac{Lf'}{L-f'}$$

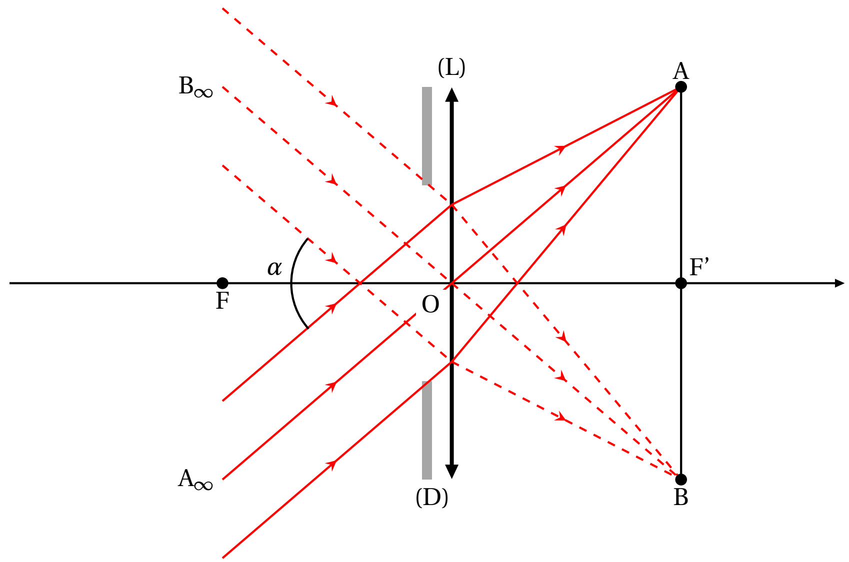
D'après cette relation quand la distance L diminue pour se rapprocher de f' alors la distance d augmente et tend vers $+\infty$. Cela signifie que **plus l'objet est proche du photographe et plus il faut éloigner le capteur de la lentille**. Il est dit dans l'énoncé que la distance d ne peut pas dépasser d_{max}. Cela signifie qu'il y a nécessairement une distance L en-dessous de laquelle on ne pourra plus prendre l'objet en photo car **il sera impossible d'éloigner suffisamment le capteur de la lentille pour effectuer la mise au point**.

Q3.c) D'après le raisonnement précédent le point le plus proche qui peut être pris en photo est celui qui correspond à $d = d_{\text{max}}$.

$$\frac{1}{d_{\text{max}}} + \frac{1}{L_{\text{min}}} = \frac{1}{f'} \iff \boxed{L_{\text{min}} = \frac{d_{\text{max}} f'}{d_{\text{max}} - f'}}$$

Q3.d) L'application numérique donne $\boxed{L_{\text{min}} = 55\,\text{cm}}$.

Q4.a)



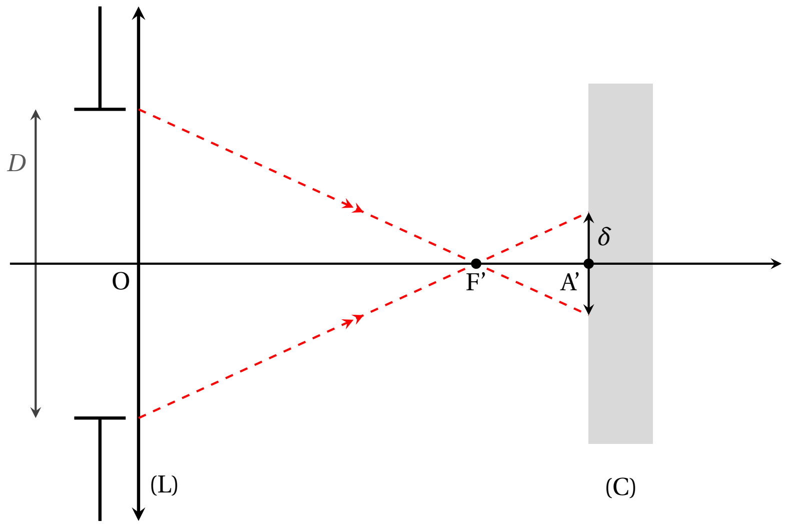
Q4.b) Dans le triangle OF'A' rectangle en O :

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\ell/2}{f'} \iff \boxed{\alpha = 2\arctan\left(\frac{\ell}{2f'}\right)}$$

Q4.c) Pour le côté de taille 24 mm on trouve un champ angulaire $\boxed{\alpha = 27°}$. Pour le côté de taille 36 mm on trouve $\boxed{\alpha = 40°}$.

Q4.d) Plus le champ angulaire est élevé et plus on aperçoit une large portion d'espace sur la photo. D'après le résultat de la question précédente le champ angulaire est une fonction décroissante de f', ce qui signifie que pour avoir un "plan large" (champ angulaire élevé) on doit utiliser une petite distance focale tandis que pour avoir un "plan serré" (champ angulaire faible) on doit utiliser une grande distance focale. En conclusion, **la photo 1 a été prise avec $f' = 50$ mm et la photo 2 avec $f' = 150$ mm**.

Q5.a) On fait un zoom sur la partie droite du schéma :



On reconnait deux triangles semblables et on applique le théorème de Thalès :

$$\frac{\delta}{D}=\frac{\overline{\mathrm{F'A'}}}{\overline{\mathrm{OF'}}}=\frac{\overline{\mathrm{F'A'}}}{f'} \iff \overline{\mathrm{F'A'}}=\frac{\delta f'}{D}$$

On exploite ensuite la relation de conjugaison de Newton :

$$\overline{\mathrm{FA}}=-\frac{f'^2}{\overline{\mathrm{F'A'}}}=-\frac{Df'}{\delta}$$

On termine le calcul avec une relation de Chasles :

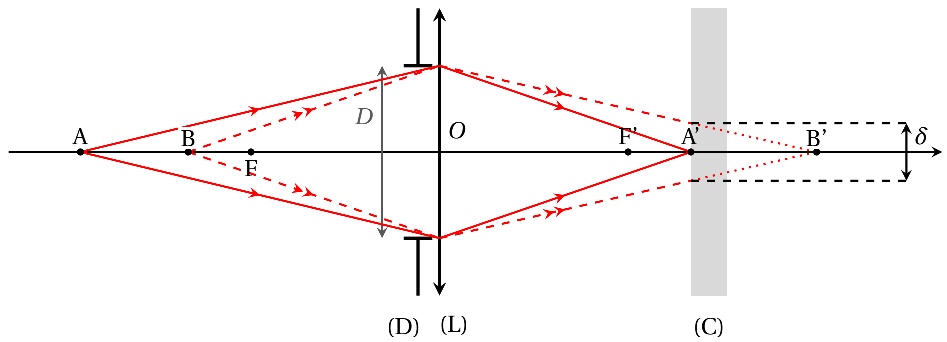
$$\begin{aligned} L_H &= -\overline{\mathrm{OA}} = -\left(\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{FA}}\right) \\ &= f' + \frac{Df'}{\delta} \\ &= \boxed{f'\left(1+\frac{D}{\delta}\right)} \end{aligned}$$

Q5.b) Notons S la surface totale du capteur et N le nombre de pixels. Sachant que la surface d'un seul pixel est égale à δ^2, on a :

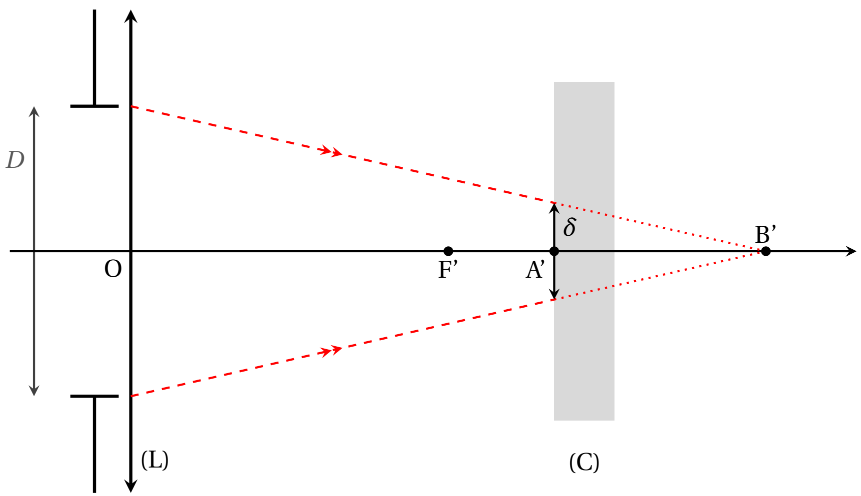
$$S = N\delta^2 \iff \boxed{\delta=\sqrt{\frac{S}{N}}=5{,}4\,\mu\mathrm{m}}$$

Q5.c) On trouve $\boxed{L_H = 58\,\mathrm{m}}$.

Q6.a) On représente schématiquement la position du point B de l'axe optique le plus proche pouvant être vu net sur la photo.



On fait à nouveau un zoom sur la partie droite du schéma.



On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{\delta}{D}=\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{OB'}}}=\frac{\overline{\mathrm{OB'}}-\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OB'}}}=1-\frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OB'}}}$$

En passant à l'inverse on obtient :

$$\frac{D}{\delta}=\frac{1}{1-\frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OB'}}}}=\frac{\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}}}{\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}}-\frac{1}{\overline{\mathrm{OB'}}}} \qquad (E)$$

D'après le résultat de la question **Q5.a)** on a aussi :

$$L_H = f'\left(1+\frac{D}{\delta}\right) \iff \frac{D}{\delta}=\frac{L_H}{f'}-1$$

On écrit ensuite la relation de conjugaison de Descartes pour les couples de points conjugués (A,A') et (B,B') :

$$\frac{1}{\overline{OA'}}+\frac{1}{L_H}=\frac{1}{f'} \iff \frac{1}{\overline{OA'}}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{L_H}$$
$$\frac{1}{\overline{OB'}}+\frac{1}{L}=\frac{1}{f'} \iff \frac{1}{\overline{OB'}}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{L}$$

On réinjecte dans l'équation (E) :

$$\frac{L_H}{f'}-1=\frac{\frac{1}{f'}-\frac{1}{L_H}}{\frac{1}{L}-\frac{1}{L_H}} \iff \frac{L_H-f'}{f'}=\frac{L(L_H-f')}{f'(L_H-L)}$$
$$\iff 1=\frac{L}{L_H-L}$$
$$\iff L_H-L=L$$
$$\iff \boxed{L=\frac{L_H}{2}}$$

Q6.b) D'après les résultats précédents si l'on fait le point sur l'hyperfocale alors on verra net (ou quasiment) tous les objets situés entre l'infini et $\frac{L_H}{2}$. Pour une photographie de paysage on cherche à avoir la distance hyperfocale **la plus courte possible** de manière à ce que les objets au premier plan soient vus nets. L'expression de L_H obtenue à la question **Q5.a)** montre que L_H diminue quand le diamètre du diaphragme D diminue. Par conséquent on aura avantage à choisir un diaphragme **le moins ouvert possible** en photographie de paysage ; le meilleur choix est $\boxed{D=f'/16}$.

Q6.c) C'est la **diffraction** de la lumière à travers le diaphragme qui provoque la dégradation de la qualité de l'image. En effet plus le diaphragme est fermé et plus les tâches de diffraction produites sur le capteur sont larges, ce qui nuit au stigmatisme de l'objectif. Dans les objectifs du commerce l'ouverture minimale est généralement égale à $f'/16$ ou bien $f'/32$. Il est inutile d'utiliser des diamètres plus faibles car les photos produites seraient beaucoup trop dégradées par la diffraction.

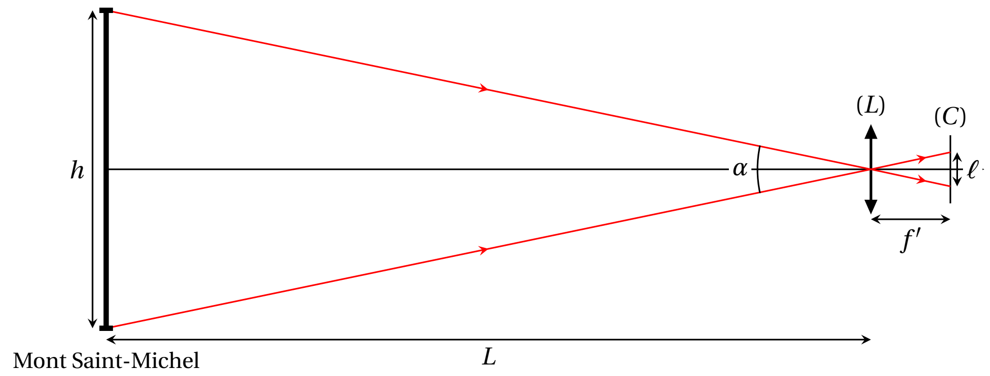
Remarque : vous avez appris au lycée que la diffraction est visible à l'œil nu lorsque la lumière rencontre un obstacle dont la taille est légèrement supérieure à la longueur d'onde, autrement de l'ordre de quelques microns. On pourrait penser que la diffraction produite par le diaphragme, dont le diamètre est de l'ordre du millimètre, est insignifiante. Il ne faut pas oublier que chaque pixel du capteur a une taille de l'ordre de quelques microns ! Il suffit que les tâches de diffraction aient une taille suffisante pour recouvrir plusieurs pixels et la dégradation de la qualité de la photo devient sensible.

Remarque : un autre problème apparaît lorsque l'on utilise un diaphragme très fermé. Le flux de lumière qui entre dans l'appareil diminue quand on ferme le diaphragme, donc pour avoir une photo de même luminosité il faut augmenter la durée pendant laquelle le diaphragme s'ouvre pour laisser la lumière éclairer le capteur (on l'appelle le "temps de pose"). Si le temps de pose est trop grand (de l'ordre d'un dixième de seconde ou plus) alors les mouvements involontaires du bras du photographe peuvent produire un "flou de bougé" sur la photo. On peut corriger cet effet en posant l'appareil sur un trépied ou bien en utilisant un stabilisateur, c'est-à-dire un dispositif électromécanique qui corrige en temps réel les mouvements de l'appareil pour maintenir le capteur aussi immobile que possible pendant la prise de vue.

Q7. On extrait les informations importantes des documents 1, 2 et 3 :

- l'objectif peut être modélisé comme une lentille mince convergente de distance focale $f'=18\,\text{mm}$ (document 2) ;
- la photographie est prise en mode "paysage" (le grand côté du capteur est positionné à l'horizontale) ; la dimension verticale du capteur (celle qui nous intéresse le plus dans ce problème) est $d=5{,}7\,\text{mm}$ (document 1) ;
- le photographe est situé à une distance $L=1{,}46\,\text{km}$ du Mont Saint-Michel (document 3).

Dans un premier temps, représentons schématiquement la situation (elle n'est pas à l'échelle pour plus de clarté). On fait l'approximation que le Mont Saint-Michel est un objet à l'infini (approximation excellente car il est éloigné d'une distance L très supérieure à f'). Dans ce cas le capteur se situe dans le plan focal image de l'objectif. On note h la hauteur du Mont Saint-Michel que l'on cherche à calculer, α la taille angulaire du Mont Saint-Michel et ℓ la taille de l'image du Mont Saint-Michel sur le capteur (mesurée dans la direction verticale, entre le pied du Mont et la pointe de la flèche).



On détermine ℓ en mesurant sur la photographie la distance qui sépare le niveau de la baie de la pointe de la flèche et en la rapportant à l'échelle du capteur. On trouve que l'image du Mont a une taille égale à 35% de la hauteur du capteur. On en déduit que :

$$\ell=0{,}35\times 5{,}7=2{,}0\,\text{mm}$$

Enfin on peut relier ℓ à la hauteur h et la distance L en utilisant le **théorème de Thalès** :

$$\frac{h}{L}=\frac{\ell}{f'} \iff \boxed{h=\frac{\ell\,L}{f'}=1{,}6\cdot 10^2\,\text{m}}$$

Exercice 2 : Alimentation d'un moteur

Partie 1 : Étude du générateur

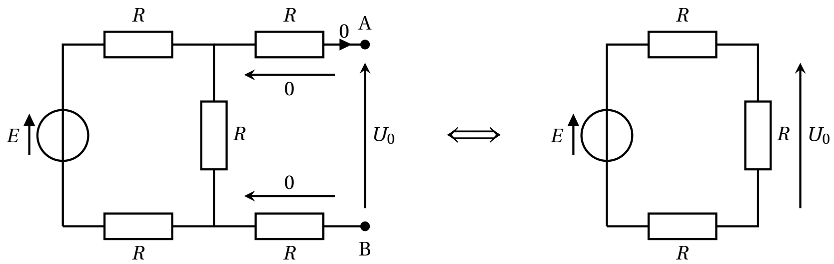
1. Sur le schéma de la figure 4 on reconnaît que le dipôle AB est représenté en **convention générateur**. Par conséquent la puissance fournie vaut $\mathscr{P}_f = UI$. On constate qu'en tout point de la caracétristique elle est **positive** (U et I tous les deux positifs) ; le dipôle AB a donc un comportement **générateur** en tout point de sa caractéristique.

2. L'équation de cette caractéristique statique peut s'écrire sous la forme (vu en cours) :

$$\frac{U}{U_0} + \frac{I}{I_0} = 1 \iff U = U_0 - \frac{U_0}{I_0} I$$

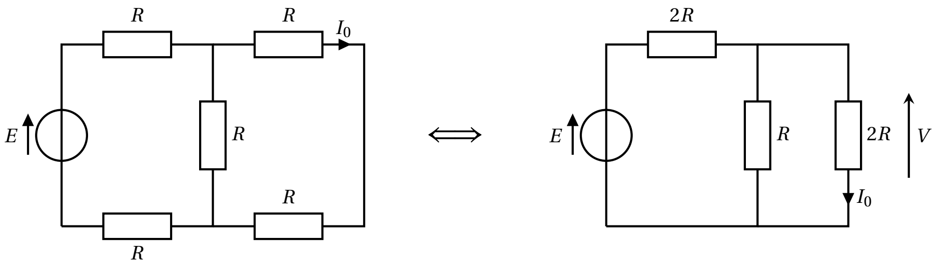
Cette loi d'évolution est semblable à celle d'un générateur de Thévenin de force électromotrice $\boxed{E_{\text{th}} = U_0}$ et de résistance interne $\boxed{R_{\text{th}} = \dfrac{U_0}{I_0}}$, tels que représentés sur la figure 4.

3. On calcule la tension à vide du générateur. La tension aux bornes des deux résistances de droite est nulle puisque $I = 0$. Par conséquent, U_0 est également la tension aux bornes de la résistance centrale et on peut supprimer la branche ouverte du circuit, ce qui conduit au schéma équivalent ci-dessous :



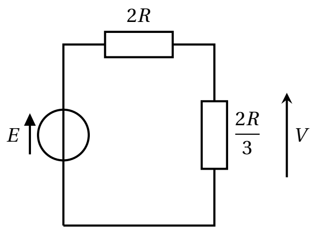
On calcule alors immédiatement la tension à vide avec la loi du pont diviseur de tension : $\boxed{U_0 = \dfrac{E}{3}}$.

4. On commence par simplifier le schéma en rassemblant les résistances qui sont en série :



Avant de calculer l'intensité I_0 on va chercher à exprimer la tension V aux bornes des deux résistors en dérivation. Pour cela on rassemble ces deux résistances en une résistance équivalente telle que :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} \iff R_{\text{eq}} = \frac{2R}{3}$$



On calcule V à l'aide de la loi du pont diviseur de tension :

$$V = \frac{\frac{2R}{3}}{\frac{2R}{3} + 2R} E = \frac{E}{4}$$

On termine le calcul avec une loi d'Ohm :

$$\boxed{I_0 = \frac{V}{2R} = \frac{E}{8R}}$$

5. À partir des résultats précédents on conclut que :

$$\boxed{E_{\text{th}} = U_0 = \frac{E}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{R_{\text{th}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{8R}{3}}$$

Partie 2 : Générateur connecté au moteur

6. On détermine I immédiatement en appliquant a loi de Pouillet : $\boxed{I = \dfrac{E_{\text{th}} - E_{\text{m}}}{R_{\text{th}} + R_{\text{m}}}}$.

Ensuite, on utilise la loi d'additivité des tensions : $\boxed{U = E_{\text{m}} + R_{\text{m}} I = \dfrac{E_{\text{th}} R_{\text{m}} + E_{\text{m}} R_{\text{th}}}{R_{\text{m}} + R_{\text{th}}}}$.

Enfin, on calcule la puissance reçue par le moteur : $\boxed{\mathscr{P}_{\text{r}} = UI = \dfrac{(E_{\text{th}} - E_{\text{m}})(E_{\text{th}} R_{\text{m}} + E_{\text{m}} R_{\text{th}})}{(R_{\text{m}} + R_{\text{th}})^2}}$.

Numériquement, on obtient : $\boxed{I = 0{,}38\,\text{A}}$, $\boxed{U = 7{,}3\,\text{V}}$, $\boxed{\mathscr{P}_{\text{r}} = 2{,}8\,\text{W}}$.

7. La puissance reçue par la source idéale de tension E_{m} vaut : $\boxed{\mathscr{P}_{\text{m}} = E_{\text{m}} I = 1{,}9\,\text{W}}$ et le rendement vaut : $\boxed{\eta = \dfrac{E_{\text{m}} I}{UI} = \dfrac{E_{\text{m}}}{U} = 0{,}68}$. Le rendement du moteur est de $\boxed{68\ \%}$.

8. Le moteur se comporte comme un récepteur électrique à condition que $\mathscr{P}_{\text{r}} \geq 0$. D'après le résultat de la question **4**, on voit que cela n'est possible que si $E_{\text{m}} \leq E_{\text{th}}$. Par conséquent, la valeur maximale que l'on peut donner à E_{m} est $\boxed{E_{\text{m,max}} = E_{\text{th}}}$.

9. On exprime la fonction $\mathscr{P}_{\text{m}}(E_{\text{m}})$:

$$\mathscr{P}_{\text{m}}(E_{\text{m}}) = E_{\text{m}} I = \frac{(E_{\text{th}} - E_{\text{m}}) E_{\text{m}}}{R_{\text{th}} + R_{\text{m}}}$$

On calcule ensuite sa dérivée :

$$\mathscr{P}'_{\text{m}}(E_{\text{m}}) = \frac{E_{\text{th}} - 2E_{\text{m}}}{R_{\text{th}} + R_{\text{m}}}$$

La puissance est maximale lorsque la dérivée s'annule, c'est-à-dire pour $\boxed{E_\mathrm{m} = \dfrac{E_\mathrm{th}}{2}}$. On a alors :

$$\boxed{\mathscr{P}_\mathrm{m,max} = \frac{E_\mathrm{th}^2}{4(R_\mathrm{th} + R_\mathrm{m})} = 2{,}2\,\mathrm{W}}$$

10. On exprime maintenant la fonction $\eta(E_\mathrm{m})$:

$$\eta = \frac{E_\mathrm{m}}{U} = (R_\mathrm{th} + R_\mathrm{m})\frac{E_\mathrm{m}}{E_\mathrm{th}R_\mathrm{m} + E_\mathrm{m}R_\mathrm{th}}$$

et on calcule sa dérivée :

$$\eta'(E_\mathrm{m}) = (R_\mathrm{th} + R_\mathrm{m})\frac{E_\mathrm{th}R_\mathrm{m} + E_\mathrm{m}R_\mathrm{th} - R_\mathrm{th}E_\mathrm{m}}{(E_\mathrm{th}R_\mathrm{m} + E_\mathrm{m}R_\mathrm{th})^2} = \frac{(R_\mathrm{th} + R_\mathrm{m})E_\mathrm{th}R_\mathrm{m}}{(E_\mathrm{th}R_\mathrm{m} + E_\mathrm{m}R_\mathrm{th})^2}$$

On constate que $\eta'(E_\mathrm{m}) > 0\ \forall E_\mathrm{m}$ donc $\boxed{\eta(E_\mathrm{m})\text{ est strictement croissante}}$. On a vu que E_m ne peut pas être supérieure à E_th donc :

$$\boxed{\eta_\mathrm{max} = \eta(E_\mathrm{th}) = \frac{E_\mathrm{th}(R_\mathrm{th} + R_\mathrm{m})}{E_\mathrm{th}R_\mathrm{m} + E_\mathrm{th}R_\mathrm{th}} = 1}$$

Le rendement maximal est de 100%, lorsque $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{th}$. Malheureusement, cette configuration implique que $I = 0$ donc que $\boxed{\mathscr{P}_\mathrm{m} = 0\,!}$. On comprend qu'en augmentant la valeur de E_m, on améliore le rendement au prix d'une puissance motrice plus faible. La configuration $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{th}$ n'est évidemment pas souhaitable.