

Correction du DNS 8

EXERCICE 1

1) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (fonction rationnelle). Pour tout $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 1)(x - 2)^2 - (x^3 - x - 1)2(x - 2)}{(x - 2)^4} \\ &= \frac{(3x^2 - 1)(x - 2) - 2(x^3 - x - 1)}{(x - 2)^3} \\ &= \frac{x^3 - 6x^2 + x + 4}{(x - 2)^3} \\ &= \frac{(x - 1)(x^2 - 5x - 4)}{(x - 2)^3}. \end{aligned}$$

2) La fonction g est définie et dérivable sur $D =]1, +\infty[$ d'après les théorèmes sur les opérations. Pour tout $x \in D$:

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln(x) - \ln(x - 1)$$

donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{x - 1} \\ &= \frac{x - 1 - 2x}{2x(x - 1)} \\ &= -\frac{x + 1}{2x(x - 1)}. \end{aligned}$$

3) La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes sur les opérations. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2x^2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{x^2 + 2}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

4) La fonction i est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes sur les opérations. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$i'(x) = -3 \sin(x) \cos^2(x).$$

5) En écrivant

$$(x^x)^x = e^{x \ln(x^x)} = e^{x^2 \ln(x)}$$

on voit que la fonction j est définie et dérivable sur $D =]0, +\infty[$ d'après les théorèmes sur les opérations. Pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} j'(x) &= \left(2x \ln x + \frac{x^2}{x}\right) e^{x^2 \ln(x)} \\ &= x(2 \ln x + 1) e^{x^2 \ln(x)}. \end{aligned}$$

6) La fonction $\tan$ est définie et dérivable sur les intervalles de la forme $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et la fonction ch est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition la fonction k est définie et dérivable sur les intervalles de la forme $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout x appartenant à un intervalle de ce type :

$$k'(x) = \frac{\text{sh}(\tan x)}{\cos^2 x}.$$

7) Pour tout réel $x \geq 0$ on peut écrire $\ell(x) = e^{\text{sh}(\sqrt{x}) \ln 2023}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et les fonctions sh et $\exp$ le sont sur $\mathbb{R}$ donc par composition la fonction ℓ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$:

$$\ell'(x) = \frac{\text{ch}(\sqrt{x}) \ln 2023}{2\sqrt{x}} e^{\text{sh}(\sqrt{x}) \ln 2023}.$$

EXERCICE 2

On raisonne par l'absurde. Supposons que la fonction f est périodique de période T (où T est un réel strictement positif). Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a donc $f(x+T) = f(x)$, soit

$$\cos(x+T) + \cos(\sqrt{2}(x+T)) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x).$$

Pour $x = 0$ cela donne

$$\cos(T) + \cos(\sqrt{2}T) = 2$$

ce qui implique que $\cos(T) = \cos(\sqrt{2}T) = 1$ car les cosinus sont compris entre -1 et 1 .

Il existe donc deux entiers k et k' tels que $T = 2k\pi$ et $\sqrt{2}T = 2k'\pi$. En divisant ces égalités membre à membre on obtient $\sqrt{2} = \frac{k'}{k}$: c'est impossible puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel.

La fonction f n'est donc pas périodique.

EXERCICE 3

1) a) Il suffit de développer :

$$P(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 x^2 + 2a_i b_i x + b_i^2) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

C'est bien un polynôme du second degré (au plus) dont le discriminant est

$$\Delta = 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ est une somme de carrés donc $P(x) \geq 0$.

Si P avait deux racines réelles distinctes, alors il prendrait des valeurs strictement négatives et des valeurs strictement positives, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent il a au plus une racine réelle (ou il est nul). On en déduit que son discriminant est négatif ou nul.

c) D'après ce qui précède on a

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0$$

qui donne immédiatement l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

2) a) En prenant $b_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n 1 \right)$$

soit

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

b) En prenant $a_i = i$ et $b_i = \sqrt{i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n i\sqrt{i} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n i \right)$$

soit

$$\left(\sum_{i=1}^n i\sqrt{i} \right)^2 \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{n(n+1)}{2}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^n i\sqrt{i} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

c) En appliquant l'inégalité aux réels $\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n}, \frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}$ on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n 1\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)$$

soit

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)$$

qu'on peut écrire

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$