TD7 : Cinématique - corrigé

Exercice 1 : Projection dans une base orthonormée

a) (à gauche) $\boxed{\vec{A} = \|\vec{A}\|\,(\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y)}$.

b) (au centre) $\boxed{\vec{A} = \|\vec{A}\|\,(\cos\theta\,\vec{u}_x - \sin\theta\,\vec{u}_y)}$.

c) (à droite) $\boxed{\vec{A} = \|\vec{A}\|\,(-\sin\theta\,\vec{u}_x - \cos\theta\,\vec{u}_y)}$.

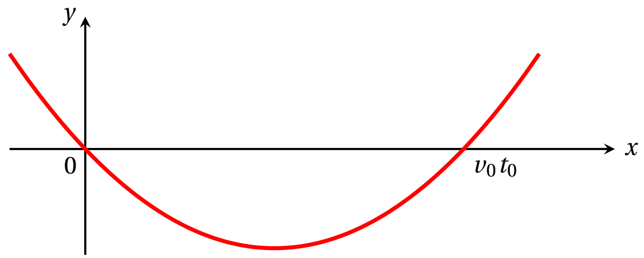
⋆ Exercice 2 : Mouvement d'un point matériel

1. Expressions générales du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes : $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$. On calcule les coordonnées à partir de $x(t)$ et $y(t)$ fournis dans l'énoncé et on obtient :

$$\boxed{\vec{v} = v_0\vec{u}_x + a_0(2t - t_0)\vec{u}_y} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{a} = 2a_0\vec{u}_y}$$

Les normes de ces vecteurs sont $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_0^2 + a_0^2(2t - t_0)^2}}$ et $\boxed{\|\vec{a}\| = 2a_0}$.

2. La première équation horaire donne $t = x/v_0$. On réinjecte dans la seconde et l'on obtient $\boxed{y(x) = \dfrac{a_0}{v_0^2}x(x - v_0t_0)}$. Il s'agit de l'équation d'une **parabole** dont les branches sont tournées vers le haut et qui coupe l'axe des abscisses en $x = 0$ et $x = v_0t_0$. On trace l'allure ci-dessous :



3. Dans la base de Frenet le vecteur accélération s'écrit : $\vec{a} = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}\vec{u}_n + \frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t}\vec{u}_t$ où R est le rayon de courbure de la trajectoire. En écrivant la norme de ce vecteur on trouve que :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\frac{\|\vec{v}\|^4}{R^2} + \left(\frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t}\right)^2} \iff \boxed{R = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\sqrt{\|\vec{a}\|^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t}\right)^2}}}$$

On a déjà exprimé $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{a}\|$. On calcule maintenant la dérivée de la norme du vecteur vitesse :

$$\frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{v_0^2 + a_0^2(2t - t_0)^2}\right) = \frac{2a_0^2(2t - t_0)}{\sqrt{v_0^2 + a_0^2(2t - t_0)^2}}$$

À la date $t = t_0/2$ on a $\|\vec{v}\| = v_0$, $\|\vec{a}\| = 2a_0$ et $\frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t} = 0$. On en déduit que $\boxed{R = \dfrac{v_0^2}{2a_0}}$.

⋆ Exercice 3 : Distance de freinage, distance d'arrêt

On repère le mouvement du véhicule avec un axe $(\mathrm{O}x)$ rectiligne dont l'origine est arbitrairement placée **à l'endroit où débute le freinage**. On choisit arbitrairement l'origine des temps **à l'instant où débute le freinage**.

La première partie du mouvement (pendant le temps de réaction $t_{\text{réac}} = 1\,\mathrm{s}$) est une translation rectiligne et uniforme, à la vitesse $v = 70\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = 19\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. La distance parcourue pendant le temps de réaction vaut $d_{\text{réac}} = v\,t_{\text{réac}} = 19\,\mathrm{m}$. (Rq : valeur arrondie à deux chiffres significatifs, mais on n'oublie pas de garder la valeur exacte en mémoire dans la calculatrice pour les AN suivantes!)

Pendant le freinage, le mouvement est uniformément décéléré. On peut écrire $\ddot{x} = \mathrm{Cste} = -a$ puis, par double intégration avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v$ et $x(0) = 0$, on obtient l'expression de la vitesse $\dot{x}(t) = v - at$ et de la position $x(t) = vt - \frac{a}{2}t^2$.

Le véhicule s'arrête lorsque $\dot{x} = 0$, à la date $t = \frac{v}{a} = 4{,}9\,\mathrm{s}$.
À cette date-là, la position du véhicule, qui correspond alors à la distance de freinage, vaut $\boxed{d_{\text{freinage}} = \dfrac{v^2}{a} - \dfrac{v^2}{2a} = \dfrac{v^2}{2a} = 47\,\mathrm{m}}$.

La distance d'arrêt du véhicule vaut $\boxed{d_{\text{arrêt}} = d_{\text{réac}} + d_{\text{freinage}} = 67\,\mathrm{m}}$.

⋆ Exercice 4 : Rotation et translation

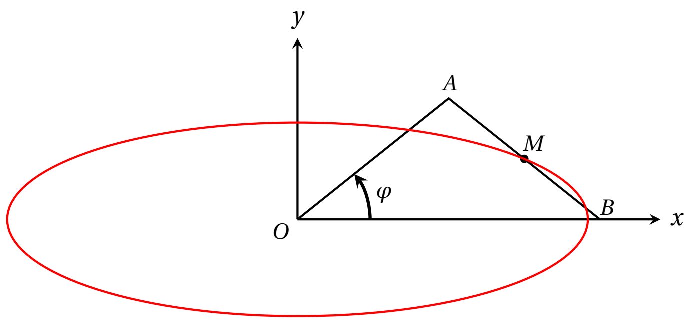
1. La position du point M est caractérisée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. On le détermine en utilisant une relation de Chasles : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ avec

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2a\cos\varphi\,\vec{u}_x + 2a\sin\varphi\,\vec{u}_y \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = a\cos\varphi\,\vec{u}_x - a\sin\varphi\,\vec{u}_y$$

Finalement, on obtient : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = 3a\cos\varphi\,\vec{u}_x + a\sin\varphi\,\vec{u}_y$.

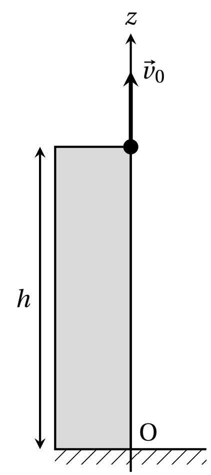
Les coordonnées du point M sont $\boxed{(x = 3a\cos\omega t,\, y = a\sin\omega t)}$.

2. Pour déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire, il faut éliminer le temps. On remarque que $\cos\omega t = \frac{x}{3a}$ et $\sin\omega t = \frac{y}{a}$. En utilisant l'identité $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$, on trouve l'équation $\boxed{\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{9a^2} = 1}$. Cette équation est celle d'une **ellipse** de demi grand-axe $3a$ et de demi petit-axe a.



⋆ Exercice 5 : Balle lancée vers le ciel

1. On reprère le mouvement vertical de la balle avec un axe (Oz) vertical ascendant dont l'origine est située au niveau du sol. L'origine des temps est arbitrairement choisie **à l'instant où la balle est lancée**. On note $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$ la vitesse initiale.



Pendant sa chute libre, l'accélération de la balle est constante : $\ddot{z} = -g$. Les conditions initiales du mouvement sont $\dot{z}(0) = v_0$ et $z(0) = h$. Par double intégration de l'accélération, on obtient la vitesse $\dot{z}(t) = -gt + v_0$ et la position $\boxed{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h}$ de la balle.

2. La balle atteint le sol lorsque $z = 0$. Connaissant la durée de la chute et la vitesse initiale, on en déduit la hauteur de l'immeuble :

$$\boxed{h = \frac{1}{2}gt_{\text{sol}}^2 - v_0t_{\text{sol}} = 27\,\text{m}}$$

3. La vitesse de la balle lorsqu'elle atteint le sol vaut $\boxed{v = |\dot{z}(t_{\text{sol}})| = |v_0 - gt_{\text{sol}}| = 28\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

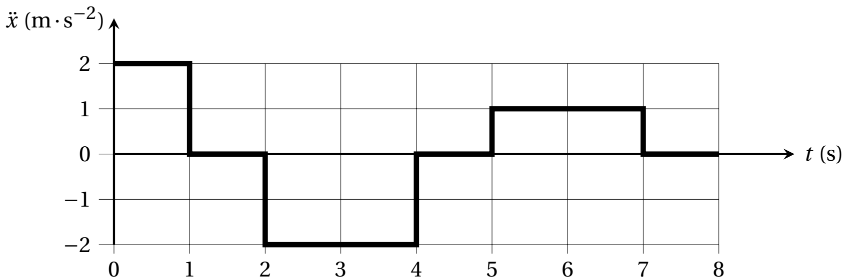
4. L'altitude maximale est atteinte lorsque la vitesse de la balle s'annule ($\dot{z} = 0$), à la date $t = \frac{v_0}{g}$. Cette altitude maximale vaut : $\boxed{z_{\max} = z\left(\frac{v_0}{g}\right) = h + \frac{v_0^2}{2g} = 38\,\text{m}}$.

⋆⋆ Exercice 6 : Avec un graphe

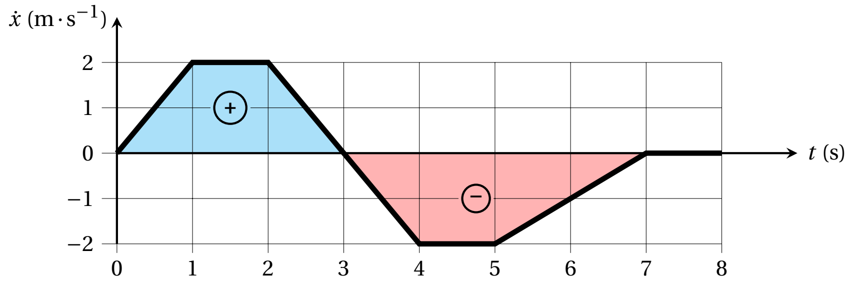
1. On rappelle que pour une fonction f dérivable, $f'(x)$ s'identifie au coefficient directeur de la tangente au graphe de la fonction f au point d'abscisse x. Pendant la première phase la vitesse varie de manière affine donc l'accélération $\ddot{x}$ (qui est égale à la dérivée temporelle de $\dot{x}$) est constante (mouvement **uniformément accéléré**) et s'identifie au **taux d'accroissement** entre $t = 0$ et $t = 1$ s :

$$\ddot{x}(0 \le t \le 1) = \frac{\dot{x}(1) - \dot{x}(0)}{1 - 0} = 2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Pendant la phase suivante ($1 \le t \le 2$) la vitesse est constante donc l'accélération est nulle (mouvement **uniforme**). En raisonnant de la même manière pour les phases suivantes on obtient le graphe ci-dessous pour les variations temporelles de l'accélération :



2. D'après l'énoncé $x(0) = 0$ donc la position de la particule à la date $t = 7$ s est donnée par l'intégrale $\int_0^7 \dot{x}(t)\mathrm{d}t$. On peut envisager de chercher l'expression de $x(t)$ sur chaque phase du mouvement puis de calculer directement l'intégrale. Il y a malgré tout une technique plus astucieuse pour obtenir le résultat ; il faut se souvenir que l'intégrale d'une fonction s'identifie à l'aire sous la courbe, comptée positivement si la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses et négativement si elle se trouve en dessous. On cherche donc à calculer l'aire sous la courbe, ce qui est plutôt aisé dans le cas présent car $\dot{x}(t)$ a une allure simple.



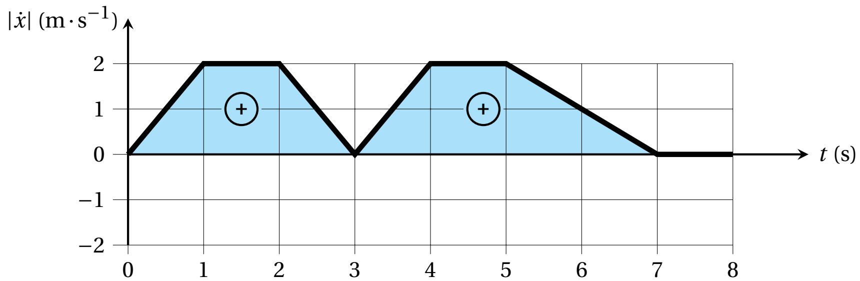
Pour calculer l'aire on s'aide de la grille qui divise le graphe en rectangles élémentaires. En regardant attentivement le graphe on compte que l'aire "bleue" correspond à la surface de quatre rectangles et l'aire "rouge" à celle de cinq rectangles. L'aire totale est donc négative et correspond à l'aire d'un seul rectangle. Chaque rectangle a une aire que l'on peut calculer comme le produit des deux côtés :

- la "hauteur" égale à $1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ en ordonnées ;
- la "largeur" égale à 1 s en abscisse.

Chaque rectangle élémentaire correspond donc à une "aire" égale à $1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \times 1\,\text{s} = 1\,\text{m}$. On conclut enfin :

$$\boxed{x(7) = \int_0^7 \dot{x}(t)\mathrm{d}t = -1\,\text{m}}$$

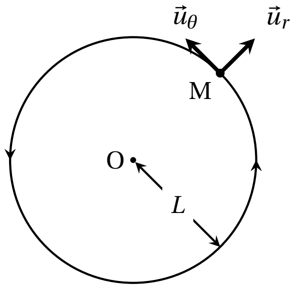
3. Pour ce mouvement rectiligne on a $\|\vec{v}\| = |\dot{x}|$. Le calcul est semblable à celui de la question précédente à la différence qu'on remplace $\dot{x}$ par sa valeur absolue.



D'après ce que l'on a vu à la question précédente l'aire totale est égale à $4 + 5 = 9$ rectangles donc la distance totale parcourue par la particule vaut $\boxed{D = 9\,\text{m}}$.

⋆ Exercice 7 : Mouvement d'une horloge

La trajectoire suivie par la pointe d'une aiguille est **circulaire**, on va donc mener l'étude dans la base **polaire** $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. On représente schématiquement la situation :



Comme les aiguilles tournent à vitesse angulaire $\dot{\theta}$ constante alors le mouvement de la pointe d'une aiguille est **circulaire et uniforme**. On exprime les vecteurs position, vitesse et accélération dans la base polaire :

$$\begin{cases} \vec{r} = L\vec{u}_r \\ \vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{a} = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_r \end{cases}$$

Pour déterminer la vitesse angulaire d'une aiguille on utilise le fait qu'elle effectue une rotation complète en une durée T connue :

$$\theta(T) - \theta(0) = \int_0^T \dot{\theta}\,\mathrm{d}t \iff 2\pi = \dot{\theta}T \iff \boxed{\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \frac{2\pi L}{T}} \quad \text{et} \quad \boxed{\|\vec{a}\| = \frac{4\pi^2 L}{T^2}}$$

La période de la grande aiguille est $T = 1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$, on obtient numériquement :

$$\boxed{\dot{\theta} = 1{,}7\cdot10^{-3}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} \quad ; \quad \boxed{\|\vec{v}\| = 2{,}6\cdot10^{-3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}} \quad ; \quad \boxed{\|\vec{a}\| = 4{,}6\cdot10^{-6}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$$

La période de la petite aiguille est $T = 12\,\mathrm{h} = 4{,}32\cdot10^4\,\mathrm{s}$, on obtient numériquement :

$$\boxed{\dot{\theta} = 1{,}5\cdot10^{-4}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} \quad ; \quad \boxed{\|\vec{v}\| = 1{,}0\cdot10^{-4}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}} \quad ; \quad \boxed{\|\vec{a}\| = 1{,}5\cdot10^{-8}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$$

⋆ Exercice 8 : Mouvement hélicoïdal

1. La distance qui sépare M de l'axe (Oz) est égale à

$$d = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r_0^2\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)} = r_0$$

Elle ne dépend pas du temps.

2. En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \iff \boxed{\vec{v} = -r_0\omega\sin(\omega t)\vec{u}_x + r_0\omega\cos(\omega t)\vec{u}_y + h\omega\vec{u}_z}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z \iff \boxed{\vec{a} = -r_0\omega^2\cos(\omega t)\vec{u}_x - r_0\omega^2\sin(\omega t)\vec{u}_y}$$

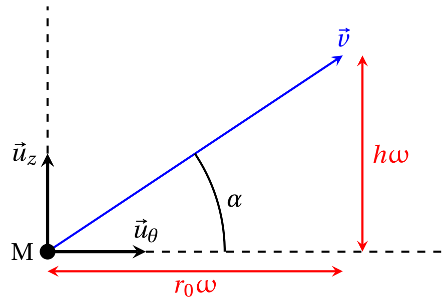
3. Les coordonnées polaires (r,θ) sont telles que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Par identification avec les expressions de $x(t)$ et $y(t)$, on reconnait que $\boxed{r(t) = r_0}$. Le paramétrage le plus simple pour la position angulaire est $\boxed{\theta = \omega t}$ (il y a en fait une infinité de paramétrages possibles : $\omega t + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$). Enfin, $\boxed{z = h\omega t}$.

On exprime les vecteur vitesse et accélération dans la base cylindrique :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z \iff \boxed{\vec{v} = r_0\omega\vec{u}_\theta + h\omega\vec{u}_z}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z \iff \boxed{\vec{a} = -r_0\omega^2\vec{u}_r}$$

4. On représente schématiquement le vecteur vitesse à un instant donné :



L'angle α entre le vecteur vitesse et l'horizontale se calcule à partir des projections de $\vec{v}$ dans la base cylindrique :

$$\tan\alpha = \frac{h\omega}{r_0\omega} \iff \boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{h}{r_0}\right)}$$

⋆⋆ Exercice 9 : Spirale exponentielle

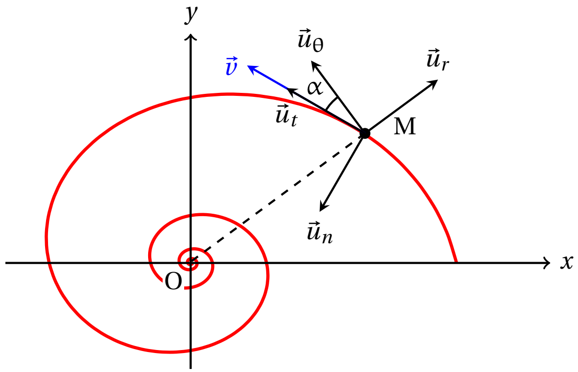
1. le vecteur position est $\vec{r} = r\vec{u}_r = a\mathrm{e}^{-t/\tau}\vec{u}_r$. Le vecteur vitesse vaut :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -\frac{a}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\vec{u}_r + a\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right) \iff \boxed{\vec{v} = a\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\vec{u}_r + \omega\vec{u}_\theta\right)}$$

Le vecteur accélération vaut :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{1}{\tau}\right)a\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\vec{u}_r + \omega\vec{u}_\theta\right) + a\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(-\frac{\omega}{\tau}\vec{u}_\theta - \omega^2\vec{u}_r\right) \iff \boxed{\vec{a} = \mathrm{e}^{-t/\tau}\left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{u}_r - \frac{2\omega}{\tau}\vec{u}_\theta\right)}$$

2.



3. Par projection dans la base polaire, on a $\vec{v} = \|\vec{v}\|\left(-\sin\alpha\,\vec{u}_r + \cos\alpha\,\vec{u}_\theta\right)$. Par conséquent :

$$\begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{u}_r = -\left\|\vec{v}\right\|\sin\alpha \iff \boxed{\sin\alpha = -\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}_r}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}} \\ \vec{v}\cdot\vec{u}_\theta = \|\vec{v}\|\cos\alpha \iff \boxed{\cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}_\theta}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}} \end{cases}$$

$\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ sont indépendant du temps donc α est indépendant du temps.

4. On écrit le vecteur accélération dans la base de Frenet :

$$\vec{a} = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}\vec{u}_n + \frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t}\vec{u}_t$$

La composante normale de l'accélération vaut $a_n = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}$. D'un autre côté, on peut également écrire :

$$a_n = \vec{a}\cdot\vec{u}_n = \vec{a}\cdot\left(-\cos\alpha\,\vec{u}_r - \sin\alpha\,\vec{u}_\theta\right) = -a_r\cos\alpha - a_\theta\sin\alpha$$

où a_r et a_θ sont les composantes radiales et orthoradiales de l'accélération. Par identification, on en déduit donc que :

$$\frac{\|\vec{v}\|^2}{R} = -a_r\cos\alpha - a_\theta\sin\alpha \iff R = -\frac{\|\vec{v}\|^2}{a_r\cos\alpha + a_\theta\sin\alpha}$$

En utilisant les résultats des questions 1 et 3, on poursuit le calcul :

$$R = -\frac{a^2 e^{-2t/\tau}\left(\frac{1}{\omega^2}+\tau^2\right)}{a e^{-t/\tau}\left[\left(\frac{1}{\omega^2}-\tau^2\right)\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} - \frac{2\omega}{\tau}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\right]} = -\frac{\left(1+\omega^2\tau^2\right)^{3/2}}{(1-\omega^2\tau^2)\omega\tau - 2\omega\tau}\,a e^{-t/\tau}$$

On reconnaît $r = a e^{-t/\tau}$ et $\xi = \omega\tau$. Après simplifications, on aboutit à :

$$\boxed{R = \sqrt{1+\frac{1}{\xi^2}}\,r}$$

★★ Exercice 10 : Intégration par séparation des variables

1. On transforme cette équation :

$$x = a\sqrt{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} - b \iff \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{x+b}{a}\right)^2 \iff \boxed{\frac{a^2}{(x+b)^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t}$$

2. On intègre cette équation entre la position initiale $(t = 0, x = 0)$ et une position ultérieure du point au cours du mouvement (t, x) :

$$\int_0^x \frac{a^2}{(x'+b)^2}\mathrm{d}x' = \int_0^t \mathrm{d}t' \iff \left[-\frac{a^2}{x+b} + \frac{a^2}{b}\right] = t$$

Il reste à isoler x. Après quelques calculs, on obtient : $\boxed{x(t) = \dfrac{b^2 t}{a^2 - bt}}$.

★★★ Exercice 11 : Record du monde du 100 m

Notons a_0 l'accélération intiale d'Usain Bolt, et mettons en équation la loi horaire de son accélération. Tout d'abord, l'accélération décroit linéairement, de a_0 à 0, pendant une durée τ. Ensuite l'accélération est nulle jusqu'à la fin de la course. L'accélération peut être écrite sous la forme :

$$a(t) = \begin{cases} a_0\left(1-\frac{t}{\tau}\right) & 0 \le t \le \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

Pour déterminer la loi de vitesse $v(t)$, on intègre l'accélération par rapport au temps, avec comme conditions limites : $v(0) = 0$ (départ arrêté) et $v(t > \tau) = v_{\max}$ (après la période d'accélération, Usain Bolt atteint sa vitesse de pointe, que l'on cherche à calculer).

$$v(t) = \begin{cases} a_0\left(t - \frac{t^2}{2\tau}\right) & 0 \le t \le \tau \\ v_{\max} & t > \tau \end{cases}$$

Sachant que la vitesse est continue en $t = \tau$, on peut écrire une première relation entre a_0 et $v_{\max}$:

$$v_{\max} = \frac{a_0\tau}{2} \quad (1)$$

On intègre une deuxième fois pour obtenir la position d'Usaint Bolt à tout instant. Désormais, les conditions limites sont les suivantes : $x(0) = 0$ (origine au point de départ) et $x(T) = L$ (on note $T = 9{,}58\,\mathrm{s}$ la durée de la course et $L = 100\,\mathrm{m}$ la distance parcourue).

$$x(t) = \begin{cases} a_0\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\tau}\right) & 0 \le t \le \tau \\ v_{\max}(t-T) + L & t > \tau \end{cases}$$

Sachant que la position est continue en $t = \tau$, on peut écrire une deuxième relation entre a_0 et $v_{\max}$:

$$v_{\max}(\tau - T) + L = \frac{a_0\tau^2}{3} \quad (2)$$

À partir des équations (1) et (2), on montre que :

$$\boxed{v_{\text{max}} = \frac{3L}{3T-\tau} = 12{,}4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 44{,}6\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}}$$